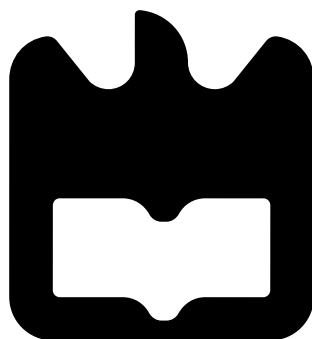




Adérito

Processos clássicos e trajectórias

Evangelista Afonso





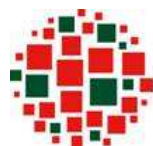
Adérito

Evangelista Afonso

Processos clássicos e trajectórias

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro, em colaboração com a Universidade de Cabo Verde, para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada à Engenharia, realizada sob a orientação científica da Prof Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Apoio Financeiro do Instituto Português de Apoio ao Desenvolvimento
(IPAD)



COOPERAÇÃO
PORTUGUESA

o júri / the jury

presidente / president

Prof Doutor Domingos Moreira Cardoso

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (por delegação do Reitor da Universidade de Aveiro)

vogais / examiners committee

Prof Doutora Maria Fernanda Nunes Diamantino

Professora Auxiliar do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

vogais / examiners committee

Prof Doutora Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas

Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientadora)

”Se permanecerdes em mim, e as minhas palavras permanecerem em vós, pedireis o que quiserdes, e vos será feito”. (João; 15: 7)

agradecimentos /
acknowledgements

Agradeço esta Vitória:

A DEUS

Força maior do universo, ser onipotente e onisciente, por ter me dado tudo que eu sempre precisei.

Aos meus pais, Francisco Lopes Afonso (Alcides) e Domingas Nunes Nascimento Pinto (Gugu), que me puseram no mundo e aos quais tenho muito respeito.

À minha esposa, Domingas de Pina Centeio Afonso (Minga), que esteve sempre ao meu lado desde os primeiros momentos que nos conhecemos e a quem eu amo muito.

Aos meus filhos, Adelcides Adérito de Pina Afonso e Edilson Evangelista de Pina Afonso, abençoados por Deus e aos quais são a razão da minha vida.

À minha professora, Adelaide Freitas, pelo apoio, paciência e disponibilidade em orientar-me na realização desta dissertação.

À minha irmã Edna e seu marido Nuno, pelo apoio que me deram durante a minha estadia em Lisboa e na aquisição de alguns materiais de apoio à realização deste trabalho.

À direcção do Liceu Domingos Ramos, onde lecciono, na pessoa da directora Rosa Silva, pela faculdade que me deu nas pesquisas na Internet e também por facilitar a comunicação online com a minha orientadora em Portugal.

Por fim, mas não menos importante, ao IPPAD pelo apoio financeiro, à Universidade de Aveiro e à Universidade de Cabo Verde e todo o pessoal, docente e não docente, que tornaram possível a concretização da realização do curso de Mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia em Cabo Verde.

Resumo

Na presente dissertação são abordados vários processos estocásticos. O principal objectivo desta dissertação é mostrar ferramentas de simulação gráfica que permitam construir trajectórias de diferentes tipos de processos estocásticos e assim providenciar uma dimensão visual das propriedades a eles associados. Em particular, dá-se ênfase ao uso do Microsoft Excel como ferramenta prática na construção de trajectórias.

Abstract

In the present dissertation several stochastic processes are considered. The main goal of this dissertation is to show graphical simulation tools which can provide a deeper understanding of the stochastic processes. In particular, simple manners of constructing sample paths of some classic types of stochastic processes using Excel Microsoft are described.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
1 Introdução	1
1.1 Definição e Classificação dos Processos	1
1.2 Objectivos e Organização da Dissertação	5
2 Alguns Tipos Clássicos de Processos Estocásticos	7
2.1 Processos Estacionários	7
2.2 Processo Gaussiano	15
2.3 Processos de Markov	15
2.4 Passeio Aleatório	18
2.5 Processo de Poisson	19
2.6 Processos de Difusão	33
2.6.1 Introdução	33
2.6.2 Processo de Wiener	35
2.6.3 Movimento Browniano com <i>Drift</i>	45
2.6.4 Movimento Browniano Geométrico	46
3 Construção de Trajectórias	48
3.1 Introdução	48
3.2 Classificação dos Processos Estocásticos	49

3.3	Incrementos e Estacionariedade	53
3.4	Passeio Aleatório e Processos de Poisson	56
3.5	Movimento Browniano	59
4	Conclusões	61
	Bibliografia	63

Lista de Figuras

1.1	Classificação de processos estocásticos	4
2.1	Trajectórias de processos estocásticos com incrementos de diferentes tipos .	9
2.2	Exemplo de um processo fortemente estacionário	12
2.3	Trajectórias de processos fracamente mas não fortemente estacionários . .	14
2.4	Andrei Andreyevich Markov	16
2.5	Uma trajectória de um passeio aleatório simétrico	20
2.6	Siméon Denis Poisson	20
2.7	Trajectórias de processos de Poisson homogéneos	25
2.8	Trajectórias de processos de Poisson não homogéneos	29
2.9	Trajectórias de processos de Poisson compostos	31
2.10	Robert Brown	36
2.11	Norbert Wiener	38
2.12	Trajectória de um movimento browniano	40
3.1	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(a).	51
3.2	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(b).	51
3.3	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(c).	52
3.4	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(d).	53
3.5	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(a).	54
3.6	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(b).	55
3.7	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(c).	55

3.8	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(d).	56
3.9	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.3.	56
3.10	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.5.	57
3.11	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.8(a).	58
3.12	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.9.	59
3.13	Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.12.	60

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição e Classificação dos Processos

Diariamente qualquer pessoa é confrontada com situações de manifesta imprevisibilidade tais como o estado do tempo ao acordar, o tempo que demora a chegar ao emprego, o número de chamadas telefónicas que recebe, o número de pessoas em fila de espera numa caixa de supermercado, o consumo de electricidade em casa, etc. Por vezes, estando mais atenta, observa também o índice da bolsa de valores ou a cotação de determinado activo financeiro, o valor assumido por um qualquer índice económico, etc. Ora, todas estas situações imprevisíveis correspondem a fenómenos que são fortemente influenciados pelo acaso, o que significa que a aleatoriedade é um factor marcante e inerente ao modo como se comportam e evoluem. Por esta razão, são designados de *fenómenos aleatórios*.

A Teoria da Probabilidade é um ramo da Matemática que tem por objectivo o estudo de fenómenos aleatórios, na perspectiva de formular modelos que expliquem e descrevam o comportamento de tais fenómenos. Há fenómenos que não são estáticos mas evoluem no tempo, no sentido em que a correspondente experiência aleatória não permite produzir resultados sob condições perfeitamente análogas. Por exemplo, a taxa mensal de inflação num determinado país tem características diferentes consoante o mês podendo os seus valores não ser observados repetidamente sempre nas mesmas condições. A *Teoria dos*

Processos Estocásticos, ramo particular da Teoria da Probabilidade, ocupa-se desta classe de fenómenos aleatórios que dependem do parâmetro, designado habitualmente por t (de tempo), que traduz os instantes em que os fenómenos são observados.

São muitos os domínios de aplicação da Teoria dos Processos Estocásticos em diferentes áreas da Ciência, tais como Física, Biologia, Economia e Gestão, Engenharia, etc. Podemos fazer referências a alguns exemplos de aplicações em cada uma destas áreas como sejam, o movimento das partículas no espaço, o estudo do desenvolvimento de populações pela análise do número de descendentes na geração seguinte, a descrição diária de sistemas de controlo em processos industriais, o controlo de stocks numa loja comercial, o número de clientes numa fila de espera, a análise de flutuações económicas, o valor de intensidade num ponto de uma imagem em movimento, etc. Em todos estes exemplos, ao resultado de uma experiência aleatória, fica associado um valor aleatório que varia com um parâmetro temporal ou espacial, dando origem não a uma variável aleatória mas a uma sequência ou família de variáveis aleatórias indexadas naquele parâmetro. Por outras palavras, tem-se um processo estocástico.

Em termos formais,

Definição 1.1 (Processo estocástico) *Seja (Ω, A, P) um espaço de probabilidade e T um subconjunto de \mathbb{R} . Um processo estocástico é uma família de funções aleatórias $X(t, \omega)$ definidas no produto cartesiano $T \times \Omega$ tal que, para cada $t \in T$, $X(t, \cdot)$ é uma função ou variável aleatória definida sobre o espaço (Ω, A) e com valores no espaço $(E, B)^1$, i.e.,*

$$\begin{aligned} X(t, \cdot) : (\Omega, A) &\rightarrow (E, B) \\ \omega &\mapsto X(t, \omega) \end{aligned}$$

Simbolicamente escreve-se $\{X(t, \omega) : \omega \in \Omega, t \in T\}$ ou $\{X_t(\omega) : \omega \in \Omega, t \in T\}$ ou, simplesmente, suprimindo a escrita do argumento ω ,

$$\{X_t, t \in T\}.$$

¹Em geral, $(E, B) \equiv (\mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n})$, onde $B_{\mathbb{R}^n}$ é o conjunto dos borelianos de \mathbb{R}^n .

Na literatura também se pode encontrar a designação de processo aleatório para designar um processo estocástico (ver referências contidas no Wikipedia, [25]). Se o parâmetro t representar uma quantidade temporal será mais usual falar-se de processo estocástico [17]. Registrar a evolução do fenómeno aleatório num gráfico permite visualizar eventuais tendências ou características do fenómeno em estudo ao longo do parâmetro temporal t . Diz-se que o gráfico descreve a trajectória do processo. Formalmente,

Definição 1.2 (Trajectória de um Processo Estocástico) *Chama-se realização de um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ a toda a sequência de valores $X_t (= X_t(\omega))$ no tempo t , para um valor fixo de ω . A uma representação gráfica de uma sequência $X_t(\omega)$ em função de t designa-se trajectória do processo.*

Os processos estocásticos são classificados de acordo com a natureza *contínua* (infinito não numerável) ou *discreta* (finito ou infinito numerável) do conjunto T e do espaço E (espaço de estados do processo²). A Figura 1.1 ilustra trajectórias de quatro processos distintos de acordo com essa classificação. Cada trajectória foi construída com recurso ao Microsoft Excel 2003. No Capítulo 3 (Secção 3.2) encontram-se descritos os comandos usados.

- *Exemplo de processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados discreto:* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, onde X_n = número de caras ocorridas no n -ésimo lançamento de uma moeda. Nesse caso, $T = \mathbb{N}$ e $E = \{0, 1\}$. Na Figura 1.1(a) está representada uma possível trajectória deste processo.
- *Exemplo de processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados contínuo:* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, onde X_n = tempo de duração do n -ésimo apagão ocorrido na Cidade da Praia (contado a partir de 1 de Janeiro de 2000). Nesse caso, $T = \mathbb{N}$ e $E = \mathbb{R}^+$.

Uma hipotética trajectória do processo é ilustrada na Figura 1.1(b).

²Diz-se que um número real x é um valor possível, ou um estado de um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$, se existe um instante t em T tal que $P(x - h < X_t < x + h) > 0, \forall h > 0$. Chama-se espaço de estados ao conjunto dos valores possíveis das variáveis aleatórias $X_t, t \in T$.

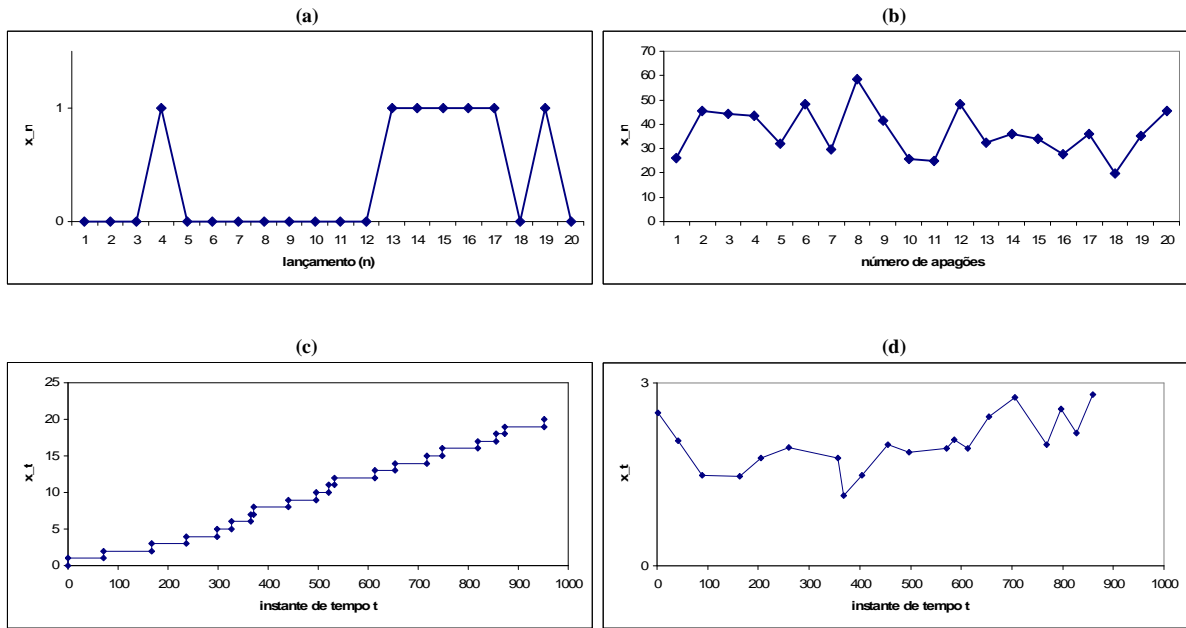


Figura 1.1: Classificação dos processos estocásticos: a natureza discreta ou contínua dos valores discriminados nos eixos dos xx e dos yy , relativos a cada trajectória, permite diferenciar o tipo de processo em causa: (a) processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados discreto; (b) processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados contínuo; (c) processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados discreto; (d) processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados contínuo.

- *Exemplo de processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados discreto:* $\{X_t, t > 0\}$, onde X_t = número de mortes ocorridas num hospital, desde a sua inauguração até ao instante de tempo t . Tem-se $E = \mathbb{N}_0$, $T = \mathbb{R}^+$ e uma hipotética trajectória desse processo na Figura 1.1(c).
- *Exemplo de processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados contínuo:* $\{X_t, t > 0\}$, onde X_t = nível das águas do Rio Vouga no instante de tempo t um dado local pré-fixado. Tem-se $T = \mathbb{R}^+$, $E = \mathbb{R}$ e a representação de uma hipotética trajectória do processo na Figura 1.1(d) .

1.2 Objectivos e Organização da Dissertação

Em geral, qualquer sistema real (fruto da acção do homem ou da própria natureza) é processado com uma incerteza impossível de ser removida na vida real. Assim, na análise de fenómenos aleatórios que evoluem no tempo, recorre-se aos processos estocásticos como forma de modelar, em termos probabilísticos, o fenómeno. Espera-se que tal contribua para uma análise da probabilidade de ocorrência de acontecimentos associados ao fenómeno ou, até mesmo, predizer o seu comportamento futuro.

Na presente dissertação são abordados vários tipos clássicos de processos estocásticos, usuais na modelação de diferentes fenómenos aleatórios, e apresentam-se ferramentas de simulação gráfica incorporadas no Microsoft Excel 2003 que potenciam a construção de possíveis trajectórias. O principal propósito e contributo desta dissertação é mostrar instrumentos simples do Excel que providenciem gerar realizações de vários tipos de processos clássicos. Obviamente que, a partir da visualização de apenas uma trajectória de um qualquer processo, poderá não ser possível captar alguma propriedade ou característica desse processo. Espera-se que a observação de várias realizações contribua para uma visualização e melhor compreensão das propriedades intrínsecas ao processo em causa.

A presente dissertação contém mais três capítulos para além deste capítulo introdutório. No Capítulo 2 abordam-se vários tipos clássicos de processos estocásticos, com realce para

os processos de incrementos independentes e estacionários, os processos estacionários, os processos de Markov, os passeios aleatórios, os processos gaussianos, os processos de Poisson (homogéneo, não-homogéneo e composto) e os processos de difusão (em particular, processos derivados do movimento browniano). No Capítulo 3 descrevem-se comandos do Excel que permitem simular realizações de processos e construir trajectórias associadas tendo por base propriedades que caracterizem o processo. Finaliza-se a dissertação com o Capítulo 4 onde se apresenta um resumo estendido do trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Alguns Tipos Clássicos de Processos Estocásticos

Vários tipos clássicos de processos estocásticos unidimensionais são aqui estudados. São apresentados gráficos de possíveis realizações de processos particulares com vista a analisar em que medida a propriedade caracterizadora do processo pode ser destacada por simples inspeção visual de trajetórias.

2.1 Processos Estacionários

A classificação de um processo estocástico ser de incrementos independentes ou estacionários está relacionada com propriedades probabilísticas das variáveis aleatórias que definem os incrementos no processo.

A classificação do tipo de estacionariedade de um processo $\{X_t, t \in T\}$ está, em termos gerais, relacionada com as propriedades probabilísticas, estáveis ou invariantes, das variáveis X_t ao longo do tempo.

Definição 2.1 (Processo Estocástico com Incrementos Independentes) *Seja $\{X_t, t \in T\}$ um processo estocástico. Considere-se, para qualquer $n \geq 1$ e valores arbitrários $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, os incrementos $\eta_1 = X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, \eta_n = X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. O processo*

$\{X_t, t \in T\}$ é designado por processo estocástico com incrementos independentes se as variáveis aleatórias $X_{t_0}, \eta_1, \dots, \eta_n$ são independentes, para $n > 0$ e $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, com $t_0, \dots, t_n \in T$.

Definição 2.2 (Processo Estocástico com Incrementos Estacionários) *Seja $\{X_t, t \in T\}$ um processo estocástico. Considere-se, para qualquer $n \geq 1$ e valores arbitrários $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, os incrementos $\eta_k = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$, com $1 \leq k \leq n$. Se as variáveis aleatórias η_1, \dots, η_n têm distribuição invariante de uma transformação no tempo $(t_0, t_1, \dots, t_n) \rightarrow (t_0 + s, t_1 + s, \dots, t_n + s)$, isto é, se $X_{t_k+s} - X_{t_{k-1}+s}$ e $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$, para todo $s > 0$, têm a mesma distribuição, então o processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ diz-se com incrementos estacionários.*

Na Figura 2.1 estão representadas trajectórias de processos com incrementos independentes, não independentes, estacionários e não estacionários. Na Secção 3.3 descrevem-se os processos e os comandos em Excel usados na construção desses gráficos.

À partida, a partir da visualização de apenas uma trajectória de um processo poderá não ser viável detectar o comportamento probabilístico dos incrementos quanto à sua estacionariedade (igualdade de distribuição) e independência. Porém, nas trajectórias representadas na Figura 2.1 observam-se tendências. Nomeadamente, é visível notar que na trajectória representada no gráfico (b) a distância entre duas observações consecutivas tende a aumentar à medida que o tempo passa pelo que, ao observar tal trajectória, é de crer que a lei de probabilidade a que obedecem os incrementos dependa do instante em que ocorre o incremento. De igual modo, no gráfico (d), observa-se que o incremento é nulo ou não nulo, consoante o instante seja par ou ímpar; donde, pela observação desta trajectória, é de suspeitar que os incrementos sejam não estacionários. Em oposição, para as trajectórias à esquerda na Figura 2.1, gráficos (a) e (c), observam-se incrementos constantes; logo, a distribuição dos incrementos será invariante com o tempo. A produção de repetições de trajectórias de tais processos poderão reforçar e confirmar estas observações.

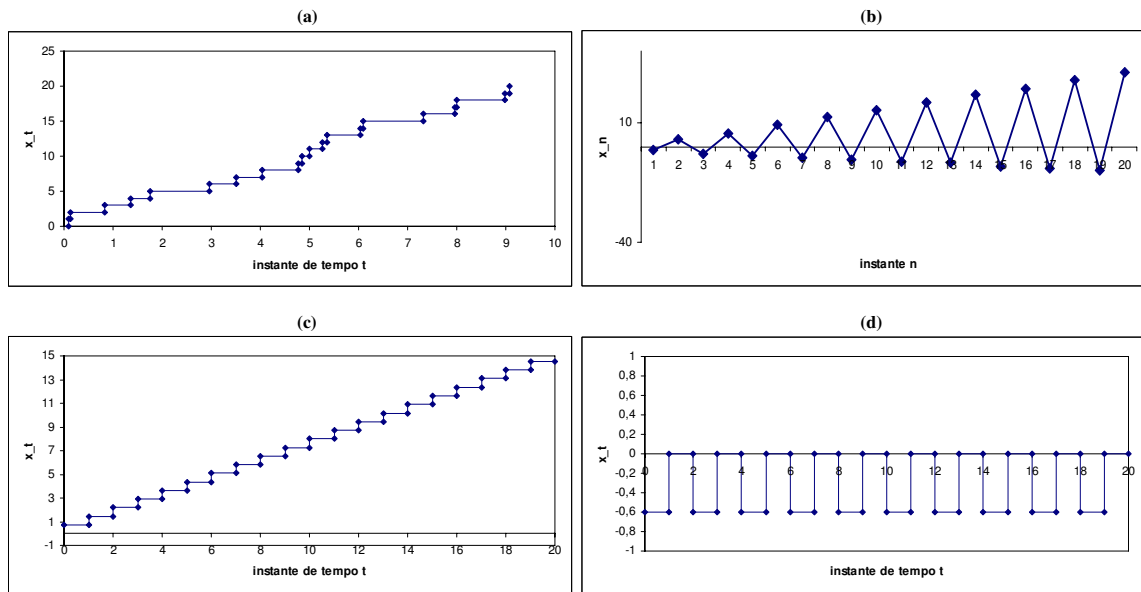


Figura 2.1: Ilustração de trajetórias de processos estocásticos $\{X_t, t \in T\}$ com incrementos: (a) independentes e estacionários ($T = (0, +\infty]$); (b) independentes e não estacionários ($T = \mathbb{N}$); (c) não independentes e estacionários ($T = \mathbb{N}$); (d) não independentes e não estacionários ($T = \mathbb{N}$).

Propriedade 2.1.1 *Seja $\{X_t, t \in T\}$ um processo com incrementos independentes. Então, a função característica ϕ do vector aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, qualquer que seja a sua dimensão e os instantes considerados, é tal que*

$$\phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(u_1, \dots, u_n) = \phi_{X_{t_1}}(u_1 + \dots + u_n) \prod_{k=2}^n \phi_{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}(u_k + \dots + u_n).$$

Propriedade 2.1.2 *Se $\{X_t, t \geq 0\}$ é um processo com incrementos independentes e estacionários tal que $X(0) = 0$, então existe uma constante σ não negativa tal que*

$$\text{Var}[X_t - X_s] = \sigma^2 |t - s|, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Demonstração:

Designa-se $f(t) = \text{Var}[X_t]$ e observe-se que esta função satisfaz a seguinte equação funcional:

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2).$$

Com efeito, sem perda de generalidade, tomem-se os instantes $0 < t_1 < t_2 < t_1 + t_2$; nestas condições,

i) como X_t tem incrementos estacionários, as variáveis aleatórias $X_{t_2} - X_0$ e $X_{t_1+t_2} - X_{t_1}$ são identicamente distribuídas e, portanto,

$$\text{Var}[X_{t_1+t_2} - X_{t_1}] = \text{Var}[X_{t_2} - X_0] = \text{Var}[X_{t_2}],$$

visto que $X_0 = 0$;

ii) o facto de X_t ter incrementos independentes conduz a concluir que as variáveis aleatórias $X_{t_1+t_2} - X_{t_1}$ e X_{t_1} são independentes; deste modo,

$$\text{Var}[X_{t_1+t_2} - X_{t_1} + X_{t_1}] = \text{Var}[X_{t_1+t_2} - X_{t_1}] + \text{Var}[X_{t_1}].$$

A conjugação das condições i) e ii) implica que

$$\text{Var}[X_{t_1+t_2}] = \text{Var}[X_{t_2}] + \text{Var}[X_{t_1}]$$

ou seja, $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$.

Sabe-se, da teoria das equações funcionais, que para uma função f tal que $f(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, e satisfazendo a equação funcional acima referida, existe uma constante c não negativa de forma que a função é linear, $f(t) = ct$ [10]. A função $f(t) = \text{Var}[X_t]$ encontra-se nessas condições. Pode-se assim concluir que existirá uma constante, σ^2 , de forma tal que se pode escrever

$$\text{Var}[X_t] = \sigma^2 t,$$

e portanto, pela condição i), para $t > s \geq 0$,

$$\text{Var}[X_t - X_s] = \text{Var}[X_{t-s}] = \sigma^2(t - s).$$

cqd

Em termos gerais, quando as características de aleatoriedade de um processo não se alteram ao longo do tempo diz-se que o processo é *estacionário*. Se as características de aleatoriedade sofrerem constantes modificações, o processo diz-se *evolutivo* ou *não-estacionário*. Neste caso, o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e a sua variância aumentar com o tempo.

Definição 2.3 (Processo fortemente estacionário) *Diz-se que um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é fortemente ou estritamente estacionário de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$, se para todo $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ e para todo $h \in T : t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in T$, os vectores aleatórios de dimensão n $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ são identicamente distribuídos. O processo será fortemente ou estritamente estacionário se for fortemente estacionário de ordem n , para todo $n \in \mathbb{N}$.*

EXEMPLO: Uma sucessão $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ de variáveis independentes e identicamente distribuídas representa um processo fortemente estacionário. A Figura 2.2 ilustra uma trajectória de um processo nestas condições que, como seria de esperar, não se observam tendências. Trata-se de observações de uma amostra aleatória indexadas no tempo retiradas de uma população com distribuição $N(0, 1)$.

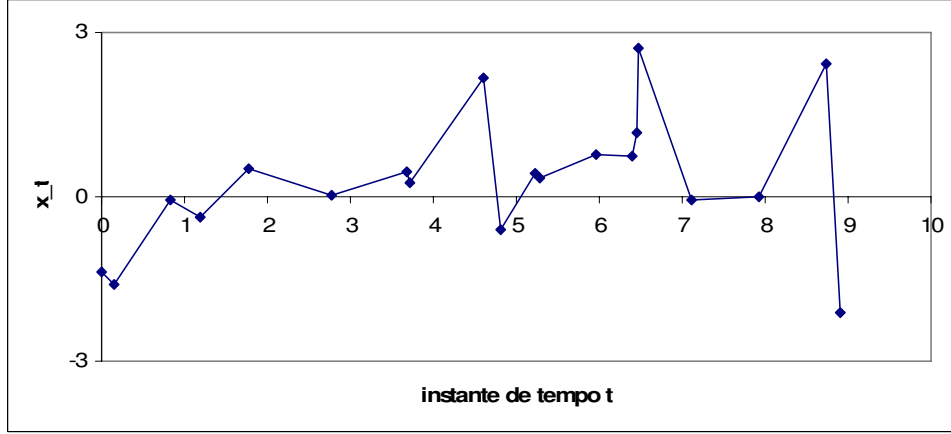


Figura 2.2: Ilustração de uma possível realização de um processo fortemente estacionário. Na Secção 3.3 descrevem-se os comandos em Excel usados na construção da trajetória.

Definição 2.4 (Processo estacionário em média) Um processo $\{X_t, t \in T\}$ diz-se estacionário em média se,

$$E[X_t] = \mu, \quad \forall t \in T.$$

Definição 2.5 (Processo de covariâncias estacionárias) Um processo $\{X_t, t \in T\}$ diz-se de covariâncias estacionárias se possuir todos os segundos momentos finitos e se a função de autocovariância, $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$, com $s \leq t$ e $s, t \in T$, é apenas função da diferença entre os instantes $t - s$, ou seja,

$$\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \gamma(|t - s|), \quad \forall s, t \in T.$$

Como consequência desta definição, verifica-se que um processo de covariâncias estacionárias terá necessariamente variâncias constantes,

$$\text{Var}[X_t] = \gamma(0), \quad \forall t \in T.$$

Definição 2.6 (Processo fracamente estacionário) Diz-se que um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é fracamente estacionário, ou estacionário em sentido lato, se verificar as três seguintes condições:

1. $E[X_t^2] < \infty$ (processo estocástico de 2ª ordem)
2. $E[X_t] = \mu, \quad \forall t$ (a função média é independente de t)
3. $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \gamma(|t - s|), \quad \forall s, t \in T$ (a função de autocovariância apenas depende da amplitude do intervalo de tempo)

Seja $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ um processo estocástico tal que $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, t \neq s$, e suponha-se que $E[\varepsilon_t] = 0$ e $\text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2, \forall t$. Este processo é estacionário de 2ª ordem, sendo usualmente designado por *ruído branco*. Chama-se ruído a sinais não desejados que perturbam a transmissão e o processamento de sinais e são incontrolláveis. As suas fontes podem ser externas ao sistema (ruído atmosférico, galáctico, solar, etc) ou internas (ruído térmico de resistências, ruído gerado em dispositivos activos, etc). O ruído branco é um processo muito utilizado na teoria das séries temporais, em particular, na construção dos modelos desenvolvidos por Box e Jenkins em 1972 [10]. Quando $\sigma = 1$, o ruído branco designa-se por ruído branco reduzido. Quando as variáveis aleatórias ε_t , com $t \in T$, são independentes e identicamente distribuídas, o ruído branco designa-se por ruído branco forte. Um ruído forte é um processo fortemente estacionário. O processo referido no exemplo anterior, e usado na construção do gráfico da Figura 2.2, é um ruído branco reduzido.

EXEMPLO: Na Figura 2.3 encontram-se representadas duas trajectórias de um processo $\{X_t, t \in N\}$ definido por variáveis independentes tais que, para cada t , X_t tem distribuição de probabilidade definida por:

x	$-\sqrt{t}$	0	\sqrt{t}
$P(X = x)$	$\frac{1}{2t}$	$1 - \frac{1}{t}$	$\frac{1}{2t}$

Assim, para este processo $\{X_t, t \in N\}$, tem-se

$$E[X_t^2] = \sum_x X_t^2 \times P(X_t) = (-\sqrt{t})^2 \times \frac{1}{2t} + 0 \times (1 - \frac{1}{t}) + (\sqrt{t})^2 \times \frac{1}{2t} = 1$$

$$E[X_t] = \sum_{i=1}^3 X_t \times P(X_t) = -t \times \frac{1}{2t} + 0 \times (1 - \frac{1}{t}) + t \times \frac{1}{2t} = 0$$

e

$$\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = 0 \quad \text{uma vez que as variáveis são independentes.}$$

donde, se conclui, que o processo é fracamente estacionário. Porém, como a distribuição de probabilidade de, por exemplo, X_1 e X_2 são distintas, o processo já não será fortemente estacionário. A representação de várias trajectórias deste processo poderá possibilitar a visualização de tendências no sentido das propriedades apontadas. À custa da visualização de apenas duas trajectórias obviamente que tais propriedades poderão não ser deduzidas. Daí a mais valia e a importância de se construir uma ferramenta dinâmica que permita produzir tantas trajectórias (distintas) quanto se queiram.

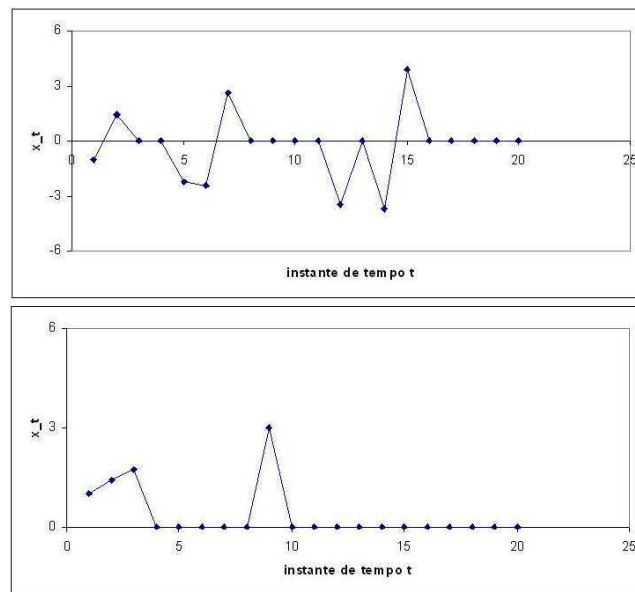


Figura 2.3: Duas trajectórias distintas observadas de um mesmo processo estocástico o qual não é fortemente estacionário, mas é fracamente estacionário.

OBSERVAÇÃO:

Estacionariedade forte + 2ª ordem \Rightarrow Estacionariedade fraca

2.2 Processo Gaussiano

Definição 2.7 (Processo Gaussiano) Diz-se que um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é um processo gaussiano se, para qualquer n e para todo $t_1, \dots, t_n \in T$, o vector aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ tem uma distribuição multinormal, ou seja, a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^n} \sqrt{\Delta}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})}$$

onde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{\mu} = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ e Σ é a matriz de covariâncias do vector aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ com determinante igual a Δ .

PROPRIEDADES DE UM PROCESSO GAUSSIANO

- Um processo gaussiano quando passa através de um sistema linear mantém-se gaussiano.
- Quaisquer n variáveis aleatórias não correlacionadas extraídas de um processo gaussiano são independentes.
- Se um processo gaussiano é fracamente estacionário então ele é também fortemente estacionário.

2.3 Processos de Markov

O processo de Markov é um processo estocástico onde somente o valor actual da variável é relevante para prever a evolução futura do processo, isto é, dado o presente do processo, o futuro é independente do seu passado.

Definição 2.8 (Processo de Markov) Diz-se que um processo estocástico de parâmetro discreto $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$, ou de parâmetro contínuo $\{X_t, t \geq 0\}$, é um processo de Markov se, para um conjunto qualquer de n instantes $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ no conjunto dos índices do processo, a distribuição condicional de X_{t_n} para valores dados de $X_{t_0}, \dots, X_{t_{n-1}}$ depende só

de $X_{t_{n-1}}$, o valor conhecido mais recente. Concretamente, para números reais quaisquer x_0, x_2, \dots, x_n ,

$$P(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \quad (2.1)$$

Um processo nas condições da Definição 2.8 diz-se que satisfaz a propriedade *Markoviana*, chamada assim em homenagem ao matemático *Andrei Andreyevich Markov* (Figura 2.4).



Figura 2.4: Andrei Andreyevich Markov. Imagem extraída em Wikipedia, [25].

“Andrei Andreyevich Markov nasceu a 14 de Junho de 1856 em Ryazan, Rússia, e faleceu a 20 de Julho de 1922 em São Petersburg, Rússia. Foi matemático tendo-se formado na Universidade de St. Petersburg em 1878. Veio a ser professor dessa Universidade em 1886. Os primeiros trabalhos de Markov correspondem ao limite de integrais e à teoria da aproximação. Depois de 1900 Markov aplicou o método das fracções contínuas que havia sido iniciado por Pafnuty Chebyshev, na teoria da probabilidade. Ele também provou o teorema do limite central. Markov é lembrado pelo seu estudo das cadeias de Markov. Teve um filho com o seu nome nascido a 9 de Setembro de 1903, que também se tornou um matemático de renome.” (Breve bibliografia extraída da Wikipedia, [25])

Um processo de Markov com espaço de estados discreto é denominado de *cadeia de Markov*. Uma cadeia de Markov pode dividir-se, de acordo com a natureza do parâmetro, em tempo discreto ou em tempo contínuo. Para uma cadeia de Markov em tempo discreto, $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$, a propriedade (2.1) simplifica-se ficando:

$$P[X_t = x_t | X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}] = P[X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}]$$

O conhecimento destas probabilidades, para todos os instantes $t_0 < \dots < t_m$ e valores de estados i_0, i_1, \dots, i_m , permitem especificar completamente a lei de probabilidade da cadeia. Para isso basta calcular, para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} & P(X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_m} = i_m) \\ &= P(X_{t_m} = i_m | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) P(X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) \\ &= P(X_{t_m} = i_m | X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) P(X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) \\ &= P(X_{t_m} = i_m | X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) P(X_{t_{m-1}} = i_{m-1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{m-2}} = i_{m-2}) \\ &\quad P(X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{m-2}} = i_{m-2}) \\ &= P(X_{t_m} = i_m | X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) P(X_{t_{m-1}} = i_{m-1} | X_{t_{m-2}} = i_{m-2}) P(X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_{m-2}} = i_{m-2}) \\ &\quad \vdots \\ &= P(X_{t_m} = i_m | X_{t_{m-1}} = i_{m-1}) P(X_{t_{m-1}} = i_{m-1} | X_{t_{m-2}} = i_{m-2}) \dots P(X_{t_1} = i_1 | X_{t_0} = i_0) P(X_{t_0} = i_0) \\ &= p_{i_{m-1}, i_m}^{(t_{m-1}, t_m)} p_{i_{m-2}, i_{m-1}}^{(t_{m-2}, t_{m-1})} \dots p_{i_0}^{(t_0)} . \end{aligned}$$

sendo $p_i^{(t)} = P(X_t = i)$ a probabilidade (não condicionada) de X_t estar no estado i no instante t (ou seja, ao fim de t passos) e $p_{i,j}^{(m,t)} = P(X_t = j | X_m = i)$, denominada probabilidade de transição, a probabilidade (condicional) de X_t estar no estado j no instante t dado que X_m estava no estado i no instante m .

Em particular, as probabilidades de transição a um passo são dadas por

$$p_{i,j}^{(t,t+1)} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) , \quad t \in \mathbb{N}, \quad i, j \in E .$$

As probabilidades de transição de uma cadeia de Markov satisfazem uma relação fundamental designada por equação de Chapman-Kolmogorov e dada por

$$p_{i,j}^{(m,t)} = \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(m,u)} p_{k,j}^{(u,t)},$$

quaisquer que sejam os instantes $0 \leq m < u < t$ e os estados i e j . Esta equação traduz que a probabilidade de transição do estado i para j é o resultado da soma das "passagens" por um estado intermédio k qualquer, num certo instante u também intermédio e fixo.

Se, numa cadeia de Markov, as probabilidades de transição, $p_{i,j}^{(m,t)}$, dependem apenas da diferença entre os instantes m e t , $|m - t|$, isto é, se as probabilidades de transição são estacionárias no sentido em que

$$p_{i,j}^{(m,m+t)} = P(X_{m+t} = j | X_m = i) = p_{i,j}^{(t)},$$

então a cadeia de Markov diz-se homogénea.

Seja $\mathbb{P} = [p_{i,j}]_{i,j \in E}$ a matriz das probabilidades de transição a um passo numa cadeia de Markov homogénea e seja $\pi^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \dots)$ o vector das probabilidades iniciais. A partir da matriz \mathbb{P} e do vector $\pi^{(0)}$ é possível calcular a probabilidade da cadeia se encontrar num dado estado j ao fim de t transições, i.e., $P(X_t = j)$. Na realidade, denotando $\pi^{(t)} = (P(X_t = 1), P(X_t = 2), \dots)$ tem-se

$$\pi^{(t)} = \pi_j^{t-1} [p_{i,j}^{(1)}] = \pi^{(t-1)} \mathbb{P} = (\pi^{(t-2)} \mathbb{P}) \mathbb{P} = \pi^{(t-2)} \mathbb{P}^2 = \dots = \pi^{(0)} \mathbb{P}^t.$$

2.4 Passeio Aleatório

Um processo de Markov particularmente usado em várias áreas científicas é o passeio aleatório. Nomeadamente,

- na Economia, para modelar a evolução dos preços e outros factores;
- na Genética populacional, para descrever propriedades estatísticas de deriva genética;
- na Física, como modelo simplificado do movimento Browniano e dos movimentos aleatórios das moléculas em líquidos e gases;

- na Matemática, para calcular soluções para a equação de Laplace, para estimar a medida harmónica e para várias construções em Análise e Cálculo Combinatório;
- na Informática, para estimar o tamanho da Web,

entre muitas outras aplicações.

Definição 2.9 (Passeio aleatório) *Seja $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes. Seja $S_0 = 0$ e $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, o processo estocástico $\{S_n, n \geq 0\}$ é um passeio aleatório.*

Um passeio aleatório diz-se simples se

$$P(X_n = 1) = p, P(X_n = -1) = q, P(X_n = 0) = r, \text{ com } p + q + r = 1,$$

e

$$p_{i,j} = \begin{cases} p & , j = i + 1 \\ r & , j = i \\ q & , j = i - 1 \\ 0 & , \text{outros casos} \end{cases}$$

Se $r = 0$ e $p = q = \frac{1}{2}$ então o passeio aleatório será simétrico. A Figura 2.5 ilustra uma realização de um passeio simétrico.

2.5 Processo de Poisson

Usualmente associa-se o processo de Poisson (em homenagem a Simon Poisson, Figura 2.6) a um processo de contagem $\{N_t, t \geq 0\}$ em que N_t representa o número de ocorrências de um acontecimento num intervalo de tempo $(0, t]$, sendo que os acontecimentos ocorrem de forma independente uns dos outros.

O domínio de aplicações dos processos de Poisson é vasto e abrange um grande número de ciências. Por exemplo, na economia e na gestão, usualmente recorre-se aos processos de Poisson na modelação de chegadas de clientes a determinado serviço, de saídas de um

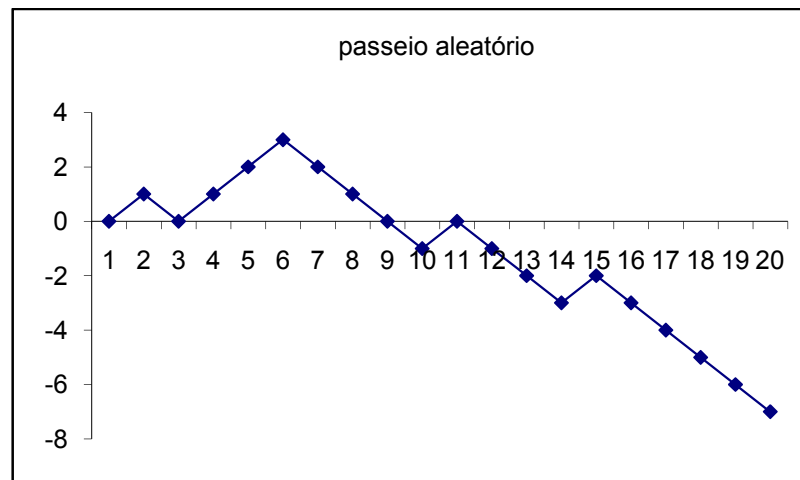


Figura 2.5: Ilustração da trajetória de um passeio aleatório simétrico. Nas abcissas representam-se os instantes de tempo t e nas ordenadas, os estados X_t

certo produto em stock num armazém, de execuções de serviços num local de interesse, de ocorrências de acidentes, etc.



Figura 2.6: Siméon Denis Poisson. Imagem extraída em Wikipedia, [25].

“Siméon Denis Poisson foi um engenheiro e matemático francês famoso pelas suas equações. Nasceu em Pithiviers no dia 21 de Junho de 1781. Morreu em Paris, no dia 25 de Abril de 1840. Filho de um administrador público, entrou para a École Polytechnique em 1798, em Palaiseau, onde se formou, estudando com professores como Lagrange, Laplace e Fourier, dos quais se tornou amigo pessoal. Desenvolveu também o Expoente de Poisson, que é usado na transformação adiabática de um gás. Esse expoente é a razão entre a capacidade térmica molar de um gás a pressão constante e a capacidade térmica molar de um gás a volume constante. A lei de transformação adiabática de um gás diz que o produto entre a pressão de um gás e o seu volume elevado ao expoente de Poisson é constante. Contribuiu também para as teorias da electricidade e do magnetismo e estudou o movimento da lua. Em 1812, publicou trabalhos que ajudaram a electricidade e o magnetismo a se tornarem um ramo da física matemática.”

Processo de Poisson Homogéneo

Quando os acontecimentos não ocorrem simultaneamente, i.e., caso o processo de Poisson se encontre no estado n e a única transição possível, caso exista, seja para o estado $n + 1$, então o processo de Poisson diz-se homogéneo.

Definição 2.10 (Processo de Poisson homogéneo) *Um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$, com espaço de estados $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$, diz-se um processo de Poisson homogéneo de parâmetro λ ($\lambda > 0$) se as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) $N_0 = 0$;*
- ii) Se $s < t$ então $N_s \leq N_t$;*
- iii) O processo tem incrementos independentes e estacionários, isto é, se $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, para $n \geq 2$, então $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$, são variáveis independentes e, para quaisquer s_1, s_2 e t , com $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$ e $t > 0$, as variáveis aleatórias $N_{s_1+t} - N_{s_1}$ e $N_{s_2+t} - N_{s_2}$ são identicamente distribuídas;*

- iv) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o_h$, para quaisquer t e h , tais que $t \geq 0$ e $h > 0$;
v) $P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o_h$, para quaisquer t e h , tais que $t \geq 0$ e $h > 0$;
vi) $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o_h$ para quaisquer t e h , tais que $t \geq 0$ e $h > 0$.

OBSERVAÇÕES:

- Na definição acima, o_h denota uma função real de h que decresce para zero mais rápido que h , isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_h}{h} = 0$$

- A partir das condições da Definição 2.10 é possível deduzir um sistema de equações diferenciais, conhecido por sistema de equações diferenciais de Chapman-Kolmogorov, cuja resolução conduz à identificação da distribuição de probabilidades de N_t , para cada $t > 0$, dada por:

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- A condição iii) implica que o processo é uma cadeia de Markov homogénea em tempo contínuo. De facto, para todo $n \geq 0$, quaisquer $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ e quaisquer $0 \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$ em \mathbb{N} , se tem

$$\begin{aligned} & P(N_{t_n} = i_n | N_{t_1} = i_1, \dots, N_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1} | N_{t_1} = i_1, N_{t_2} - N_{t_1} = i_2 - i_1, \dots, N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}) \\ &= P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}) = P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1} | N_{t_{n-1}} - N_0 = i_{n-1}) \\ &= P(N_{t_n} = i_n | N_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \end{aligned}$$

Por outro lado, para quaisquer $t_1, t_2, s > 0$ e quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$ com $i \leq j$, tem-se

$$\begin{aligned} P(N_{t_1+s} = j | N_{t_1} = i) &= P(N_{t_1+s} - N_{t_1} = j - i) = P(N_{t_2+s} - N_{t_2} = j - i) \\ &= P(N_{t_2+s} = j | N_{t_2} = i). \end{aligned}$$

As probabilidades de transição são dadas por

$$\begin{aligned} p_{j,k}^{(t)} &= P(N_{s+t} = k | N_s = j) = \frac{P(N_{s+t} - N_s = k - j, N_s = j)}{P(N_s = j)} \\ &= P(N_{s+t} - N_s = k - j) = P(N_t = k - j) \\ &= \frac{(\lambda t)^{k-j} e^{-\lambda t}}{(k-j)!}, \end{aligned}$$

para quaisquer $s, t, s \geq 0, t > 0$ e quaisquer $j, k, j \leq k$.

Uma vez que o processo de Poisson tem incrementos independentes e estacionários, pela propriedade de Markov, conduz a concluir que um processo de Poisson é um caso particular de uma cadeia de Markov em tempo contínuo. Assim, do ponto de vista probabilístico, o processo pode iniciar-se em qualquer instante de tempo, e portanto, denotando por $\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_i$ o intervalo de tempo para a ocorrência do acontecimento $i + 1 \in \{1, \dots\}$, segue-se que os tempos entre ocorrências consecutivas τ_i , para $i = 0, 1, 2, \dots$, são identicamente distribuídos.

Por outro lado, como $N_t \sim P(\lambda t)$ tem-se

$$P[\tau_0 > t] = P[N_t = 0] = e^{-\lambda t}$$

Consequentemente, a função densidade de probabilidade de τ_0 é

$$\begin{aligned} f_{\tau_0}(t) &= \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t}) \\ &= \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

O que significa dizer que τ_0 segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ . Note-se que τ_0 representa o tempo desde o instante inicial até ao instante em que ocorre a primeira ocorrência no processo.

Na base disto é possível provar que o intervalo de tempo entre duas ocorrências consecutivas (τ_i), do estado $i - 1$ para o estado i , tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ e que as variáveis aleatórias $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ são independentes.

Propriedade 2.5.1 *Se $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson de parâmetro λ e se τ_i representa o tempo que o processo gasta no estado i , para $i = 1, 2, \dots$, então as variáveis aleatórias τ_1, τ_2, \dots têm distribuição exponencial de média $1/\lambda$, para todo i .*

Esta propriedade é particularmente útil para a construção de trajectórias de processos de Poisson [12]. Na realidade, a Propriedade 2.5.1 permite estabelecer uma forma de gerar processos de Poisson a partir da simulação aleatória dos instantes de ocorrência de cada novo acontecimento com base numa distribuição exponencial. Um esquema de simulação dos instantes t_1, t_2, \dots, t_n relativo às n primeiras ocorrências de um processo de Poisson pode ser definido através do seguinte algoritmo [22]:

Algoritmo para gerar um processo de Poisson homogéneo de parâmetro λ :

Passo 1 $t_0 = 0$

Passo 2 Para $i = 1, 2, \dots, n$, fazer

Passo 2a Gerar um valor e_i de uma distribuição exponencial de média $1/\lambda$;

Passo 2b $t_i = t_{i-1} + e_i$.

A trajectória, com n passos, do processo de Poisson homogéneo corresponderá ao gráfico de uma função em escada com saltos unitários nos pontos (i, t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. A Figura 2.7 ilustra trajectórias de alguns processos de Poisson assim obtidas para diferentes valores do parâmetro λ . Os comandos usados no Excel encontram-se descritos na Secção 3.4.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO:

Admita-se que o número de clientes que se dirigem por hora a uma agência bancária se processa de acordo com um processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$. Suponha-se que se estimou que a probabilidade de chegarem 15 e 16 clientes, num período de uma hora, é 0,0516 e 0,0646, respectivamente. Nestas circunstâncias,

$$\frac{P[N_1=16]}{P[N_1=15]} = \frac{0.0646}{0.0516} = 1.252 = \frac{\lambda}{16} \Rightarrow \lambda = E[N_1] \approx 20$$

pelo que, em média, chegam a essa agência cerca de 20 clientes por hora. Isto permite concluir que o número médio de clientes que acorrem à agência durante o período em que

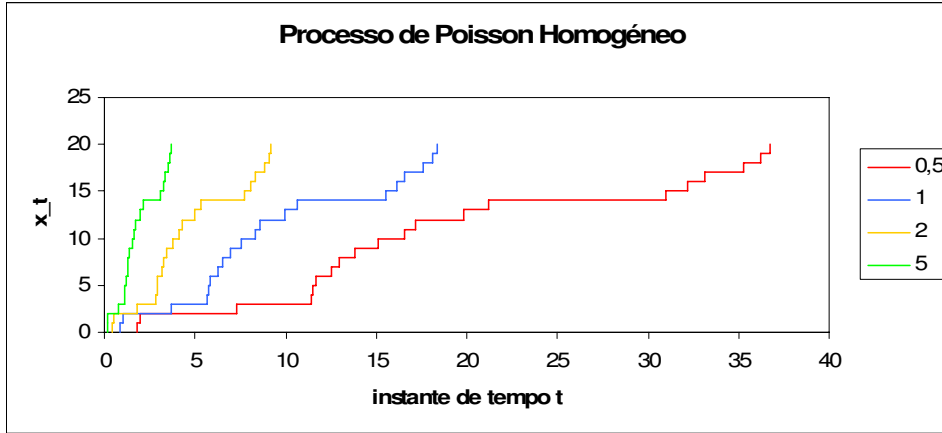


Figura 2.7: Trajectórias obtidas por realização de processos de Poisson de intensidade $\lambda = 0.5, 1, 2, 5$.

está aberta diariamente ao público (7 horas) será,

$$E[N_7] = 20 \times 7 = 140 \text{ horas.}$$

Processo de Poisson Não Homogéneo

Em muitas das aplicações, na realidade, a taxa média de ocorrência de acontecimentos num processo de contagem não é constante mas depende do instante de tempo. Por exemplo, a taxa média de chegada de um cliente a uma agência bancária não é a mesma durante um dia, a taxa média de chegada de carros a uma dada estrada principal oscila entre seu máximo durante as horas de ponta e seu mínimo durante as horas de pouco movimento. A seguinte definição toma em consideração esse facto.

Definição 2.11 (Processo de Poisson Não Homogéneo) *Um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$, com espaço de estados $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$, diz-se um processo de Poisson não homogéneo, com função de parâmetro λ_t , para $t \geq 0$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) $N_0 = 0$;
- ii) Se $s < t$ então $N_s \leq N_t$;

iii) O processo tem incrementos independentes;

iv) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda_t h + o_h$, para quaisquer t e h , tais que $t \geq 0$ e $h > 0$;

v) $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o_h$ para quaisquer t e h , tais que $t \geq 0$ e $h > 0$.

OBSERVAÇÃO: A condição iv) implica que o processo $\{N_t, t \geq 0\}$ não tem incrementos estacionários a menos que $\lambda_t \equiv \lambda > 0$. Nesse caso, $\{N_t, t \geq 0\}$ tornar-se-á num processo de Poisson homogéneo, de parâmetro λ .

Propriedade 2.5.2 Se $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson não homogéneo com função de parâmetro λ_t , então $N_{s+t} - N_s$ segue uma distribuição de probabilidade de Poisson de parâmetro $m_{s+t} - m_s$, para todo $s, t \geq 0$, onde

$$m_s = \int_0^s \lambda_\tau d\tau$$

Demonstração: Denote-se

$$p_{n_{s,t}} = P(N_{s+t} - N_s = n) \quad , \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Usando o facto de que os incrementos do processo $\{N_t, t \geq 0\}$ serem independentes e as condições iv) e v) acima, tem-se que, para $n = 1, 2, \dots$, $p_{n_{s,t+h}}$ é igual a

$$\begin{aligned} &= P(N_{s+t} - N_s = n, N_{s+t+h} - N_{s+t} = 0) + P(N_{s+t} - N_s = n - 1, N_{s+t+h} - N_{s+t} = 1) + o_h \\ &= P(N_{s+t} - N_s = n)P(N_{s+t+h} - N_{s+t} = 0 | N_{s+t} - N_s = n) \\ &\quad + P(N_{s+t} - N_s = n - 1)P(N_{s+t+h} - N_{s+t} = 1 | N_{s+t} - N_s = n - 1) + o_h \\ &= p_{n_{s,t}}[1 - \lambda_{s+t}h + o_h] + p_{n-1_{s,t}}[\lambda_{s+t}h + o_h] + o_h \end{aligned}$$

Donde

$$p_{n_{s,t+h}} - p_{n_{s,t}} = \lambda_{s+t}h[p_{n-1_{s,t}} - p_{n_{s,t}}] + o_h$$

e portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n_{s,t+h}} - p_{n_{s,t}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_{s+t}h[p_{n-1_{s,t}} - p_{n_{s,t}}] + o_h}{h}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{n_s, t} = \lambda_{s+t} [p_{n-1_{s,t}} - p_{n_s, t}] \quad (2.2)$$

Fazendo $n = 0$ em (2.2) obtém-se a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{0_s, t} = -\lambda_{s+t} p_{0_s, t}$$

A variável s pode ser considerada como uma constante. Portanto, esta equação é uma equação diferencial homogênea ordinária linear de primeira ordem. A sua solução geral é dada por

$$p_{0_s, t} = c_0 \exp\left\{-\int_s^{s+t} \lambda_\tau d\tau\right\}$$

onde c_0 é uma constante. Fazendo uso da condição limite $p_{0_{s,0}} = 1$, obtém-se $c_0 = 1$, de modo que

$$p_{0_s, t} = \exp\left\{-\int_s^{s+t} \lambda_\tau d\tau\right\} = e^{m_s - m_{s+t}}, \quad \text{para } s, t \geq 0$$

Substituindo esta solução em (2.2), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{1_s, t} = \lambda_{s+t} [e^{m_s - m_{s+t}} - p_{1_s, t}]$$

Esta equação pode ser reescrita de seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{1_s, t} = [e^{m_s - m_{s+t}} - p_{1_s, t}] \frac{\partial}{\partial t} [m_{s+t} - m_s]$$

É fácil verificar que a solução desta equação diferencial não homogênea, que satisfaz a condição limite $p_{1_{s,0}} = 0$, é

$$p_{1_s, t} = e^{m_s - m_{s+t}} [m_{s+t} - m_s], \quad \text{para } s, t \geq 0$$

Finalmente, por indução matemática, conclui-se que

$$p_{n_s, t} = e^{m_s - m_{s+t}} \frac{[m_{s+t} - m_s]^n}{n!} \quad \forall s, t \geq 0 \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

cqd

Para simular um processo de Poisson não homogêneo, o método mais divulgado na literatura especializada é o conhecido método da rejeição ou *thinning* [veja-se, por exemplo, [24] e referências nele contidas]. Este método assume que a função λ_t é limitada superiormente, $\lambda_t < \bar{\lambda}$, e gera os tempos de ocorrência de um processo de Poisson não homogêneo à custa da simulação dos tempos de ocorrência $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$ de um processo de Poisson homogêneo de intensidade $\bar{\lambda}$, sendo que cada tempo t_i^* é aleatoriamente aceite ser do processo de Poisson não homogêneo (por exemplo, através do lançamento de uma moeda para decidir se t_i^* deve ser mantido ou rejeitado como pertencendo ao processo de Poisson não homogêneo). A sequência dos tempos de ocorrência aceites formarão os instantes de ocorrência do processo de Poisson não homogêneo pretendido. Um esquema algorítmico para a geração desses tempos pode ser definido através do seguinte conjunto de passos [22]:

Algoritmo para gerar um processo de Poisson não homogêneo com função de parâmetro $\lambda_t < \bar{\lambda}$:

Passo 1 $t_0 = 0$ e $t_0^* = 0$

Passo 2 Para $i = 1, 2, \dots, n$, fazer

Passo 2a Gerar um valor e_i de uma distribuição exponencial de média $1/\bar{\lambda}$;

Passo 2b $t_i^* = t_{i-1}^* + e_i$;

Passo 2c Gerar um valor u_i de uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 1]$;

Passo 2d Se $u_i \leq \lambda_{t_i^*}/\bar{\lambda}$ então $t_i = t_i^*$, caso contrário o valor t_i^* é eliminado (i.e., t_i^* é rejeitado ser um tempo de ocorrência para o processo de Poisson não homogêneo pretendido).

A Figura 2.8 ilustra trajectórias de Processos de Poisson com diferentes funções de parâmetro λ_t . Os comandos do Excel usados na obtenção dessas trajectórias encontram-se descritos na Secção 3.4.

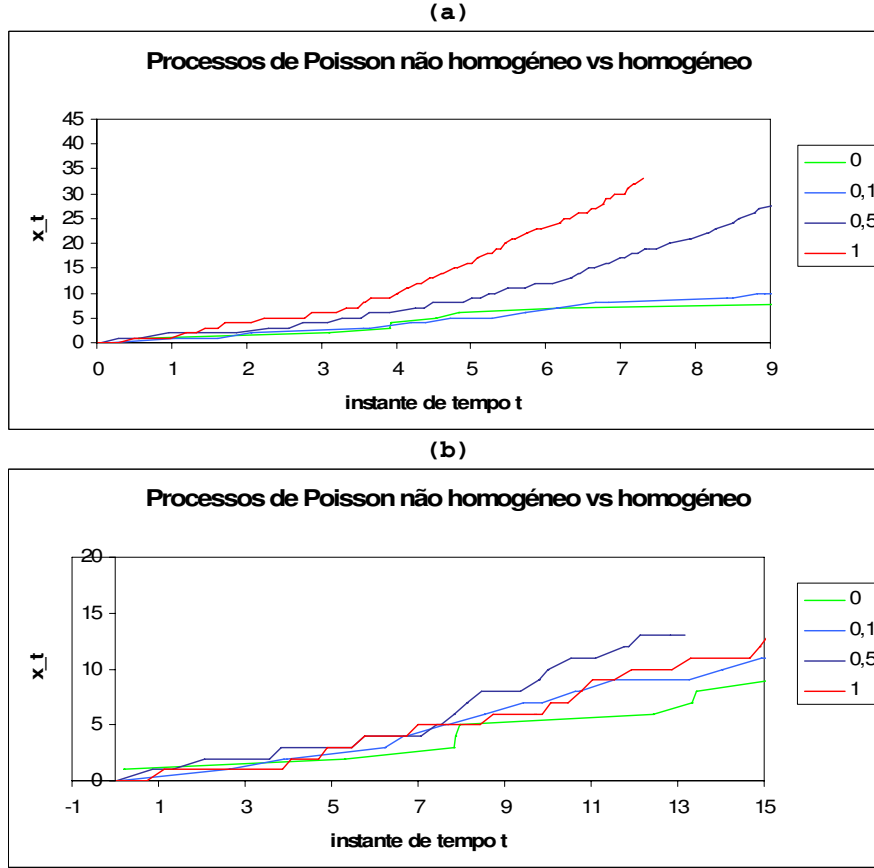


Figura 2.8: Trajectórias de processos de Poisson com função de parâmetro definida por uma (a) função linear ($\lambda_t = a + bt$) e uma (b) função periódica ($\lambda_t = a + b \cos(2\pi t)/10$), com $a = 1$ e $b = 0$ (verde), $b = 0.1$ (azul), $b = 0.5$ (preto) e $b = 1$ (vermelho). O caso $b = 0$ corresponde a trajectórias de processos de Poisson homogêneos.

Teorema 2.5.1 Se $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson não homogêneo com função de parâmetro λ_t , então, para qualquer $t > 0$, a função geradora de probabilidade é dada por

$$\Psi_{N_t}(s) = e^{m_t(s-1)}, \quad |s| < 1.$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO:

Suponha-se que, numa estação de televisão, o serviço de relações públicas recebe, após a emissão de determinado programa, chamadas telefónicas de apoio ou de desagrado a esse programa. Admita que as chamadas são recebidas, por hora, de acordo com um

processo de Poisson de parâmetro $\lambda = 100 - t, 0 \leq t \leq 100$. Designe-se por $\{N_t, t \geq 0\}$ o processo relativo ao número de chamadas telefônicas recebidas até ao instante t . Nestas circunstâncias, $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson não homogêneo, uma vez que o parâmetro é função de t , sendo

$$m_t = \int_0^t (100 - \tau) d\tau = 100t - \frac{t^2}{2}$$

e

$$\Psi_{N_t}(s) = e^{(100t - \frac{t^2}{2})(s-1)}, \quad |s| < 1.$$

Assim, por exemplo, o número médio de chamadas recebidas durante o primeiro quarto de hora é determinado por

$$E(N_{\frac{1}{4}}) = m_{\frac{1}{4}} = 25 - \frac{1}{32} = 24.96 \approx 25$$

e a probabilidade de que não ocorra nenhuma chamada durante o primeiro minuto é

$$p_0 = P(N_{\frac{1}{60}} = 0) = \Psi_{N_{\frac{1}{60}}}(0) = e^{\frac{1}{7200} \frac{100}{60}} = 0.1889.$$

Processo de Poisson Composto

O processo de Poisson composto está relacionado com o cálculo da soma de um conjunto de sucessos em tempos aleatórios.

Definição 2.12 (Processo de Poisson Composto) *Um processo estocástico $\{Y_t, t \geq 0\}$ diz-se ser um processo de Poisson composto se for definido por*

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad \forall t \geq 0,$$

em que $Y_t = 0$ se $N_t = 0$, $\{N_t, t \geq 0\}$ representa um processo de Poisson de parâmetro λ e $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que o processo $\{N_t, t \geq 0\}$ e a sucessão $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ são independentes.

A Figura 2.9 ilustra trajectórias de quatro processos de Poisson compostos distintos, diferenciados pela distribuição de probabilidade da sucessão Y_t . Os comandos do Excel usados na obtenção dessas trajectórias encontram-se descritos na Secção 3.4.

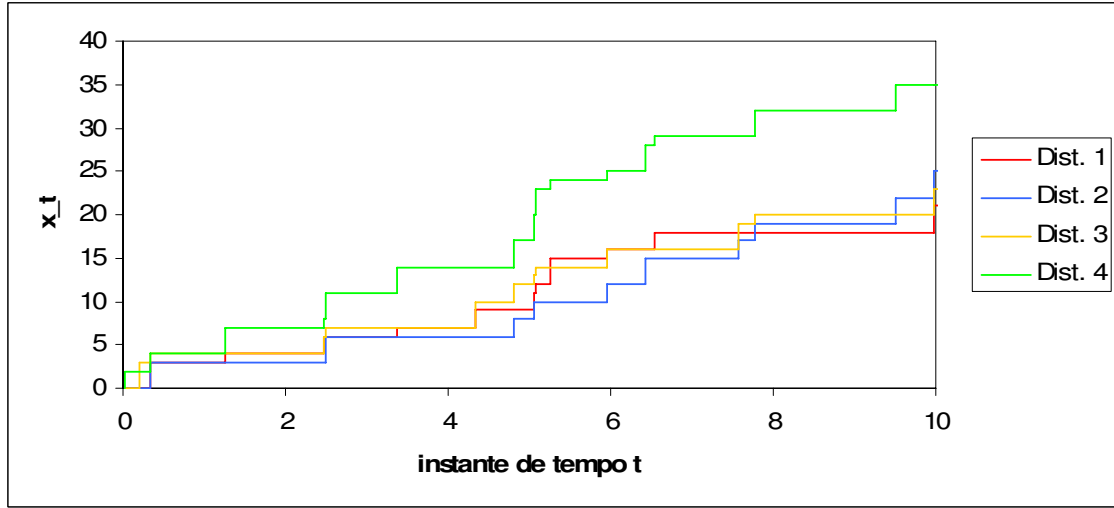


Figura 2.9: Trajectórias obtidas por realização de um processo de Poisson composto com distribuição de probabilidade de X_t dada por (Dist 1): $P(X_t = 0) = 0.5$, $P(X_t = 1) = 0.25$, $P(X_t = 2) = 0.2$, $P(X_t = 3) = 0.05$; (Dist 2): $P(X_t = 0) = 0.4$, $P(X_t = 1) = P(X_t = 2) = P(X_t = 3) = 0.2$; (Dist 3): $P(X_t = 0) = P(X_t = 1) = 0.3$, $P(X_t = 1) = P(X_t = 2) = 0.2$; (Dist 4): $P(X_t = 0) = P(X_t = 1) = P(X_t = 2) = 0.2$, $P(X_t = 3) = 0.4$.

Teorema 2.5.2 *Se $\{Y_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson composto, então:*

- i) $\{Y_t, t \geq 0\}$ tem incrementos independentes e estacionários.
- ii) a função característica de $Y_t, t \geq 0$, é dada por

$$\phi_{Y_t}(u) = e^{\lambda t(\phi_X(u)-1)}$$

onde ϕ_X é a função característica comum às variáveis $X_k, k = 1, 2, \dots$.

- iii) Y_t tem segundos momentos finitos, desde que existam os segundos momentos comuns

às variáveis X_k , $k = 1, 2, \dots$, e tem-se

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \lambda t E(X) \\ \text{Var}(Y_t) &= \lambda t E(X^2) \\ \text{cov}(Y_t, Y_s) &= \lambda E(X^2) \min(s, t) \end{aligned}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

- Numa companhia de seguros, admita-se que os seus clientes com seguros de vida morrem nos instantes t_1, t_2, \dots , com $0 < t_1 < t_2 < \dots$ e que o número de mortes ocorridas num intervalo de amplitude t segue uma distribuição de Poisson, sendo representado pelo processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$. Quando o k -ésimo cliente morre, a companhia seguradora deverá pagar, no instante t_k , o correspondente capital seguro, designado por X_k . Defina-se Y_t como o montante total, respeitante às indemnizações dos seus clientes, que a companhia deverá pagar para o período correspondente a $(0, t]$. Consequentemente,

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k,$$

- Uma pessoa vende assinaturas de uma revista por correio. Admite-se que os clientes respondem de acordo com um processo de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ à média de 6 por dia e podem, independentemente uns dos outros, subscrever assinaturas de 1, 2 e 3 anos com probabilidades iguais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, respectivamente. Por cada assinatura vendida essa pessoa ganha uma comissão de 5 mil escudos por cada ano de subscrição. Seja X_k o montante de comissão obtido pelo k -ésimo cliente. Nestas circunstâncias, representando por $\{Y_t, t \geq 0\}$ o processo do montante total das comissões obtido até ao instante t , tem-se que este processo é de Poisson composto,

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k,$$

com X_k independentes e com distribuição idêntica à variável aleatória X que representa o ganho por assinatura,

$$X = \begin{cases} 5 & 10 & 15 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim,

$$E(Y_t) = \lambda t E(X) = 6t \left(\frac{5}{2} + \frac{10}{3} + \frac{15}{6} \right) = 50t,$$

$$Var(Y_t) = \lambda t E(X^2) = 6t \left(\frac{25}{2} + \frac{100}{3} + \frac{225}{6} \right) = 500t,$$

e tendo $\phi_X(u) = E(e^{uX}) = \frac{e^{5u}}{2} + \frac{e^{10u}}{3} + \frac{e^{15u}}{6}$ resulta

$$\phi_{Y_t}(u) = e^{6t(\phi_X(u)-1)} = \exp \left(6t \left(\frac{e^{5u}}{2} + \frac{e^{10u}}{3} + \frac{e^{15u}}{6} - 1 \right) \right).$$

2.6 Processos de Difusão

2.6.1 Introdução

Considere-se um jogo de atirar uma moeda ao ar em que um jogador ganha 100\$00 se sair *cara* (c) e perde 100\$00 se sair *coroa* (k). Seja δ a unidade de tempo entre jogadas consecutivas. Por outras palavras, o lançamento é feito unicamente em instantes de tempo $\delta, 2\delta, \dots$. Quanto é que o jogador ganhará ao fim de n lançamentos?

Denote-se por E_t o valor monetário que o jogador terá no instante de tempo t e admita-se que $E_0 = 0$, isto é, no princípio do jogo ele não tem nenhum escudo. Em cada unidade de tempo, o jogador só tem duas possibilidades: ou ganha 100\$00 ou perde 100\$00.

Uma possível realização dos n lançamentos por ser descrita pela seguinte sequência:

$$\underbrace{ckcck \cdots ckkcccc}_{n \text{ lançamentos}}$$

O lucro final do jogador não dependerá da sequência concreta de lançamentos, mas apenas do número de lançamentos de cada tipo que foram realizados. Deste modo, sejam N_c e N_k o número de lançamentos em que sai cara e coroa, respectivamente, em n lançamentos. Assim, se o jogador faz n lançamentos, tem-se que $N_c + N_k = n$. Logo,

$$N_k = n - N_c$$

Pode-se então descrever o ganho monetário (positivo ou negativo) obtido pelo jogador após $n\delta$ unidades de tempo como sendo dado por

$$E_{n\delta} = (N_c - N_k) \times 100 = (N_c - (n - N_c)) \times 100 = (2N_c - n) \times 100$$

Se em todos os lançamentos sair cara resultará $N_c = n$, e ter-se-á efectivamente que $E_{n\delta} = 100n$. Analogamente, se $N_c = 0$ então ter-se-á naturalmente $E_{n\delta} = -100n$.

O valor monetário obtido pelo jogador no fim de t , $t \geq 0$, unidades de tempo é dado por

$$E_t = E_{[\frac{t}{\delta}]\delta}$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x .

Como os lançamentos são independentes entre si, a variável aleatória N_c segue uma distribuição binomial de parâmetros n e $p = \frac{1}{2}$, no caso da moeda ser não viciada, e portanto,

$$\begin{aligned} E(E_{n\delta}) &= E[(2N_c - n)100] = 100 [2E(N_c) - E(n)] \\ &= 100 (2n\frac{1}{2} - n) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned} Var(E_{n\delta}) &= Var[(2N_c - n)100] = 100^2 [4Var(N_c)] \\ &= 100^2 4n\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = 100^2 n \end{aligned} \tag{2.4}$$

O processo $\{E_{n\delta}, n \in \mathbb{N}\}$ é um passeio aleatório (veja-se a Figura 2.5 onde é ilustrada uma possível trajectória do processo $\{E_{n\delta}, n \in \mathbb{N}\}$ com $\delta = 1$).

Considere-se agora uma quantia genérica ε em causa por jogo em vez do valor concreto 100\$00. Assim,

$$E(E_{n\delta}) = 0 \quad \text{e} \quad Var(E_{n\delta}) = \varepsilon^2 n.$$

Se δ decrescer para zero, então o passeio aleatório torna-se um processo em tempo contínuo. Contudo, dado que $Var(E_t) = Var(E_{t/\delta}) = \varepsilon^2 \frac{t}{\delta}$ é necessário que também ε tenda também para zero ao mesmo tempo que δ , caso contrário, a variância de E_t tenderá para infinito e o processo $\{E_t, t \in T\}$ deixará então de ser controlável com a evolução do tempo. Assim sendo, assume-se que existe uma constante $\sigma(> 0)$ tal que $\varepsilon = \sigma\sqrt{\delta}$; por outras palavras, seja

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 \delta$$

Deste modo, quando δ decresce para zero,

$$E(E_t)|_{t=n\delta} = 0 \quad \text{e} \quad Var(E_t)|_{t=n\delta} = \sigma^2 t, \quad \forall t \geq 0$$

Usando o teorema do limite central é possível provar que a quantidade aleatória limite W_t segue uma distribuição $N(0, n\sigma^2)$, onde W_t resulta de $E_{n\delta}$ quando o espaçamento de tempo (δ) entre lançamentos da moeda tende para zero, i.e.,

$$W_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} E_t|_{t=n\delta}, \quad (2.5)$$

Este resultado é uma característica essencial do processo de Wiener. Além disso, visto que um passeio aleatório é um processo estocástico com incrementos independentes e estacionários, o processo limite $\{W_t, t \geq 0\}$ satisfaz também essas duas propriedades.

2.6.2 Processo de Wiener

O processo de Wiener desempenha um papel fundamental na teoria dos Processos Estocásticos e suas aplicações [17]. Entre outras aplicações, o processo de Wiener proporciona um modelo teórico para o movimento irregular de partículas quando submergidas em algum sistema assim como para o ruído de agitação térmica dos circuitos elétricos. Uma partícula de, por exemplo, 10^{-4} de diâmetro submergida num líquido ou gás apresenta movimentos irregulares incessantes que são vistos com um microscópio. O movimento desta partícula é chamado de movimento browniano, em honra ao botânico inglês Robert Brown (Figura 2.10) que descobriu o fenómeno em 1827.



Figura 2.10: Robert Brown. Imagem extraída em Wikipedia, [25]

”Robert Brown nasceu em Montrose, Escócia, a 21 de Dezembro de 1773 e morreu em Londres, Inglaterra, a 10 de Junho de 1858. Estudou medicina, tendo ingressado no exército britânico como cirurgião no ano de 1773. Em Dezembro de 1800, Brown aceitou emprego como naturalista a bordo do navio HMS Investigator, sob o comando de Matthew Flinders, então a fazer os preparativos finais para uma viagem de exploração à costa da Austrália. A viagem, que se tornaria histórica pelos seus resultados, destinava-se a fazer o levantamento hidrográfico da costa australiana. Em 1827, quando examinava ao microscópio uma suspensão aquosa de grãos de pólen e esporos de musgos e de Equisetum, Brown observou que pequenas partículas contidas nos vacúolos dos grãos de pólen executavam pequenos movimentos aparentemente aleatórios. Intrigado, observou que o mesmo fenómeno ocorria em partículas de pó, o que lhe permitiu concluir que os movimentos não eram devidos a mecanismos biológicos associados ao pólen. Apesar de não ter conseguido encontrar a verdadeira explicação para o fenómeno observado, este passou a designar-se por movimento browniano, em honra do seu descobridor.” (Breve bibliografia extraída da Wikipedia, [25])

A explicação do fenómeno de movimento browniano foi um dos maiores êxitos da mecânica estatística e da teoria cinética. Em 1905, Einstein demonstrou que o movimento browniano se podia explicar supondo que as partículas estão sujeitas a um bombardeamento contínuo das moléculas no meio que as rodeiam. O seu primeiro trabalho foi generalizado, ampliado e comprovado, experimentalmente, por vários físicos.

Uma partícula browniana está sempre em movimentos por causa dos “impactos” contínuos que recebe devido ao campo de forças do meio que a rodeia. O deslocamento da partícula num intervalo de tempo (s, t) de grande amplitude, comparado com o tempo que decorre entre os impactos sucessivos pode ser considerado como a soma de um número elevado de pequenos deslocamentos. Por conseguinte, se X_t denotar o deslocamento realizado por uma partícula em movimento browniano, desde o seu ponto de partida até ao instante de tempo t , parece razoável supor que $X_t - X_s$ seguirá uma distribuição normal, segundo o teorema do limite central. É razoável supor ainda que probabilidade do deslocamento da partícula ao longo de um intervalo só dependerá da amplitude do intervalo e não do instante em que se começa a observação; ou seja, a distribuição de probabilidade do deslocamento $X_t - X_s$ será a mesma que $X_{t+h} - X_{s+h}$, para todo $h > 0$.

Admitindo também, por outro lado, que o movimento da partícula se deve inteiramente aos muitos frequentes impactos moleculares irregulares, em termos de modelo matemático, pode-se considerar a modelação do movimento de uma partícula no tempo por um processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ de incrementos independentes; os deslocamentos ao longo de intervalos que não se sobrepõem são independentes uma vez que o número e a magnitude dos impactos nos intervalos que não se sobrepõem são independentes.

Nas aplicações na área da Matemática financeira, o facto do processo possuir incrementos independentes mostra-se também adequado na modelação de fenómenos aleatórios. Por exemplo, se X_t representa o preço de um activo no instante t , o processo possuir incrementos independentes significa que uma grande variação no preço do activo num período de tempo (por exemplo, um mês) não implica que, no próximo mês, essa seja baixa ou continue alta.

Conjugando todas estas condições impostas ao processo surge a noção de processo de Wiener, em honra ao Matemático e Físico Norbert de Wiener (Figura 2.11) que foi o primeiro a considerar este modelo do movimento browniano. O processo de Wiener é também chamado de processo de Wiener-Levy ou processo do movimento browniano.



Figura 2.11: Norbert Wiener. Imagem extraída em Wikipedia, [25]

”Norbert Wiener (1894 - 1964) nasceu a 26 de Novembro, em Columbia, Missouri. Wiener foi educado pelo seu pai até que ingressou na escola secundária, a qual concluiu aos doze anos; em seguida, entrou no Tufts College para estudar Matemática e Biologia. Com 15 anos estava em Harvard Graduate School para estudar Zoologia. Seus interesses, entretanto, voltaram-se para a Matemática e Filosofia. Aos dezoito anos recebeu o doutoramento pela Universidade de Harvard, com uma tese sobre *lógica matemática*. Entre 1913 e 1914, estudou em Cambridge, na Inglaterra, com B. Russel, G. H. Hardy, J.E.Littlewood e G.E.Moore; e em Göttingen, na Alemanha, com D. Hilbert, E. Husserl e E. Landau (todos matemáticos famosos da época, sendo Russel e Husserl também filósofos). Wiener iniciou as suas actividades didácticas como professor assistente na Universidade de Harvard, mas acabou por ser contratado em 1919 pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), como instructor de Matemática, desenvolvendo toda a carreira académica nesse instituto, até se aposentar em 1960. Foi um matemático norte-americano de renome mundial, em especial, pelas suas contribuições para as teorias da informação e do controle, tendo criado o termo cibernética para descrever a conjugação dessas duas áreas científicas.”

(Breve bibliografia extraída da Wikipedia, [25])

Definição 2.13 (Processo de Wiener) *Um processo estocástico $\{W_t, t \geq 0\}$ é chamado um processo de Wiener, ou um movimento browniano, se*

- i) $W_0 = 0$;*
- ii) $\{W_t, t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;*
- iii) $\{W_t, t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários;*
- iv) $W_t \sim N(0, \sigma^2 t), \forall t > 0$.*

Qualquer trajectória de um processo de Wiener é uma função contínua não diferenciável do instante de tempo t ([12]). A Figura 2.12 ilustra uma trajectória possível de uma partícula cujo movimento é definido, em termos estocásticos, por um movimento browniano. O movimento corresponde, fisicamente, ao movimento de uma partícula sujeita, em cada instante t , a constantes mudanças de direcções entre um número infinito possível de direcções.

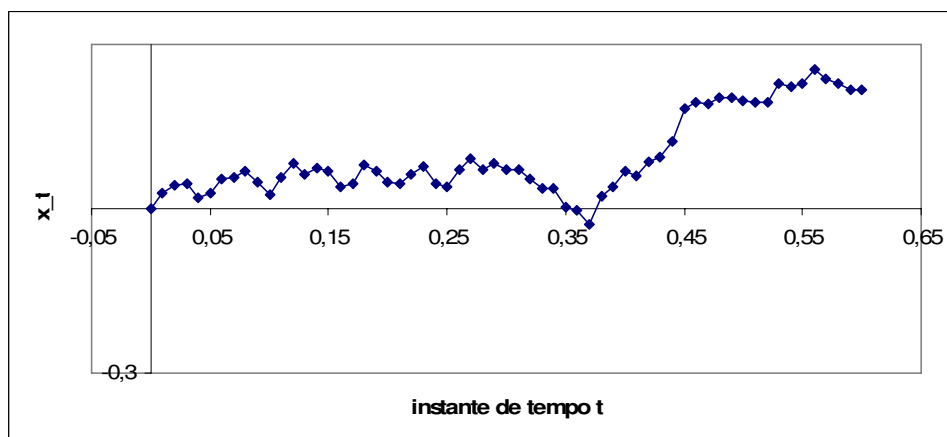


Figura 2.12: Trajectória de um movimento browniano. Na Secção 3.5 podem ser encontrados os comandos em Excel usados para a construção desta trajectória.

O processo de Wiener é também um processo Markoviano, já que é o limite de uma cadeia de Markov quando o intervalo de tempo entre acontecimentos tende para zero (veja-se (2.5)).

Na Definição 2.13, as condições *iii)* e *iv)* podem ser substituídas, de modo equivalente, por uma só condição:

$$W_{t+s} - W_s \sim N(0, \sigma^2 t), \quad \forall s, t \geq 0. \quad (2.6)$$

Assim, se $\{W_t, t \geq 0\}$ é um processo de Wiener, então é possível escrever o vector $(W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$ como combinação linear de um vector gaussiano, para todo $t_1 < t_2 < \dots < t_k$; logo, é gaussiano. Por conseguinte, o processo de Wiener é um processo gaussiano.

A função de autocovariância do processo de Wiener é dada por

$$\begin{aligned}
 Cov(W_t, W_{t+s}) &= Cov(W_t, W_t + W_{t+s} - W_t) \\
 &= Cov(W_t, W_t) + Cov(W_t, W_{t+s} - W_t) \\
 &\stackrel{\text{incr. ind.}}{=} Cov(W_t, W_t) = Var(W_t) = \sigma^2 t, \quad \forall s, t \geq 0
 \end{aligned}$$

Portanto, $Cov(W_t, W_s) = \sigma^2 \min\{s, t\}$, o que mostra que a função de autocovariância não é uma função da diferença entre os instantes e, portanto, o processo de Wiener não é um processo fracamente estacionário nem fortemente estacionário.

Por outro lado, como $Cov(W_t, W_{t+s}) \neq 0$, então W_t e W_{t+s} não são independentes e tem-se

$$\begin{aligned}
 W_{t+s}|W_t &\stackrel{d}{=} (W_{t+s} - W_t + W_t)|W_t \stackrel{d}{=} (W_{t+s} - W_t)|W_t + W_t|W_t \\
 &\stackrel{d}{=} W_{t+s} - W_t|W_t + \underbrace{W_t}_{\text{c.te}} \\
 &\sim N(0, \sigma^2 s) + W_t = N(W_t, \sigma^2 s)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Consequentemente, quanto maior for W_t , maior se espera que seja W_{t+s} .

Com base no processo de Wiener $\{W_t, t \geq 0\}$ outros processos associados podem ser considerados recebendo alguns deles nomes particulares, nomeadamente:

Movimento browniano padrão : Processo estocástico $\{B_t, t \geq 0\}$ dado por

$$B_t = \frac{W_t}{\sigma}$$

Nestas condições,

$$Var(B_t) = \frac{1}{\sigma^2} Var(W_t) = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 t = t. \tag{2.8}$$

Se um movimento browniano padrão é executado em intervalos regulares, isto é, o espaço de parâmetro do processo é o conjunto numerável \mathbb{N} , então o movimento browniano padrão corresponderá a um passeio aleatório simétrico.

Movimento browniano iniciado em c : Processo estocástico $\{W_t^*, t \geq 0\}$ dado por

$$W_t^* = W_t + c ,$$

onde c é uma constante real que define o ponto de partida do processo ($W_0^* = c$). Nestas circunstâncias, $W_t^* \sim N(c, \sigma^2 t)$, $\forall t \geq 0$.

O ponto de partida poderia ser um ponto aleatório e, nesse caso, c passaria a ser uma variável aleatória C . Impondo a independência de C e W_t , para todo $t \geq 0$, resultaria

$$\begin{aligned} E(W_t^*) &= E(W_t + C) = E(W_t) + E(C) = E(C) \\ Var(W_t^*) &= Var(W_t + C) = Var(W_t) + Var(C) = \sigma^2 t + Var(C). \end{aligned}$$

Ainda com base no movimento browniano padrão $\{B_t, t \geq 0\}$ outros processos podem ser derivados.

EXEMPLO

Considere-se o processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ definido por

$$X_t = -B_t , \quad \text{para } t \geq 0$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{bmatrix}$$

pelo que o vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ é uma transformação linear do vector gaussiano $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$. Como consequência, $\{X_t, t \geq 0\}$ é um processo gaussiano e é tal que

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(-B_t) = -E(B_t) = 0 \\ Var(X_t) &= Var(-B_t) = (-1)^2 Var(B_t) = t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t+s}) &= Cov(-B_t, -B_{t+s}) = (-1)(-1)Cov(B_t, B_{t+s}) \\
&= Cov(B_t, B_t + B_{t+s} - B_t) = Cov(B_t, B_t) + Cov(B_t, B_{t+s} - B_t) \\
&= Cov(B_t, B_t) = Var(B_t) = t
\end{aligned}$$

donde se conclui que o processo simétrico ao movimento browniano padrão, $\{-B_t, t \geq 0\}$, também é um movimento browniano.

Um movimento browniano pode ser derivado de um outro processo gaussiano não necessariamente este sendo um processo de Wiener.

EXEMPLO

Seja $\{X_t, t \geq 0\}$ um processo gaussiano tal que $X_0 = 0$, $E(X_t) = \mu t$ se $t > 0$, com $\mu \neq 0$, e

$$E(X_t X_{t+h}) = 2t + \mu^2 t(t+h), \quad \text{para } t, h \geq 0$$

Nestas condições, o processo estocástico $\{Y_t, t \geq 0\}$, com $Y_t = X_t - \mu t$, é um movimento browniano. Na verdade, este processo satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $Y_0 = X_0 - \mu \times 0 = 0 - 0 = 0$
- ii) Como $\{X_t, t \geq 0\}$ tem incrementos independentes e estacionários, então $\{X_t - \mu t, t \geq 0\}$ tem também incrementos independentes e estacionários, visto que diferem apenas de uma constante μt .
- iii) $E(Y_t) = E(X_t - \mu t) = E(X_t) - E(\mu t) = \mu t - \mu t = 0$
- iv)

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t Y_{t+h}) &= E(Y_t Y_{t+h}) - E(Y_t)E(Y_{t+h}) = E[(X_t - \mu t)(X_{t+h} - \mu(t+h))] - 0 \\
&= E(X_t X_{t+h}) - \mu t E(X_{t+h}) + \mu(t+h)E(X_t) + \mu^2 t(t+h) = \\
&= 2t = 2 \min\{t, t+h\}.
\end{aligned}$$

Portanto, o processo $\{Y_t, t \geq 0\}$ satisfaz as condições indicadas na Definição 2.7 com $\sigma^2 = 2$ pelo que é um movimento browniano.

O processo de Wiener é um tipo particular de processo de difusão o qual se define genericamente do seguinte modo.

Definição 2.14 (Processo de Difusão) *Um processo estocástico Markoviano em tempo contínuo $\{X_t, t \geq 0\}$, cujo espaço de estados é um intervalo (a, b) , é um processo de difusão se*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|X_{t+\varepsilon} - X_t| > \delta | X_t = x] = 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

e se os seus parâmetros infinitésimais definidos por

$$m(x, t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} E[X_{t+\varepsilon} - X_t | X_t = x]$$

e

$$v(x, t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} E[(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2 | X_t = x]$$

são funções contínuas de x e de t .

OBSERVAÇÕES:

- i) Os parâmetros $m(x, t)$ e $v(x, t)$ representam, respectivamente, a média e a variância infinitesimal do processo.
- ii) A condição $P[|X_{t+\varepsilon} - X_t| > \delta | X_t = x] = 0$ significa, na prática, que se o processo se encontra no estado x no instante t então a probabilidade do processo passar no instante $t + \varepsilon$ para um outro estado afastado de uma distância δ é muito pequena.
- iii) O espaço de estados do processo $\{X_t, t \geq 0\}$ pode ser qualquer intervalo $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, ou $(a, b]$. No caso do espaço de estados não possuir limite inferior ou limite superior, os extremos do intervalo, a ou b , poderão ser substituídos por $-\infty$ ou $+\infty$, respectivamente. Se os extremos a ou b fazem parte do espaço de estados, deverá garantir-se que existem $m(x, t)$ e $v(x, t)$ e estas são contínuas apenas no intervalo aberto (a, b) .

Um dos casos mais importante da aplicação do processo de difusão $\{X_t, t \in T\}$ é quando este é em tempo homogêneo e, portanto, a média infinitesimal e a variância infinitesimal não dependem de t , tendo-se $m(x)$ e $v(x)$, respectivamente. Nesse caso, prova-se que o processo $\{Y_t, t \geq 0\}$ definido por $Y_t = g(X_t)$, para $t \geq 0$, onde g é uma função estritamente monótona no espaço de estados $[a, b]$ e com segunda derivada g'' contínua em (a, b) , é também um processo de difusão e cujos parâmetros infinitesimais são dados por

$$m_Y(y) = m(x)g'(x) + \frac{1}{2}v(x)g''(x) \quad (2.9)$$

e

$$v_Y(y) = v(x)(g'(x))^2 \quad (2.10)$$

onde a variável x é expressa em termos de y , isto é, $x = g^{-1}(y)$ (g^{-1} função inversa de g).

O processo de Wiener generalizado é utilizado como elemento de construção de processos estocásticos mais complexos. Aqui serão salientados dois movimentos brownianos clássicos.

2.6.3 Movimento Browniano com *Drift*

A expressão que descreve este processo é:

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t$$

onde $\{B_t, t \geq 0\}$ é um movimento browniano padrão e μ e $\sigma \neq 0$ são constantes reais. Nesta expressão, existe uma parte previsível e determinística (μt), que define uma medida de crescimento (*drift*) ou de variação média do processo por unidade de tempo, e uma outra parte aleatória (σB_t) que fornece a volatilidade ou variância do processo.

Definição 2.15 (Movimento Browniano com *Drift* μ) *Seja $\{Y_t, t \geq 0\}$ um processo de difusão cujos parâmetros infinitesimais são dados por $m(y) = \mu$ e $v(y) = \sigma^2$. O processo $\{Y_t, t \geq 0\}$ é chamado movimento browniano (ou processo de Wiener) com coeficiente drift μ e coeficiente de difusão σ^2 .*

OBSERVAÇÕES:

i) Visto que a função $Y_t = \mu t + \sigma B_t$ é uma transformação linear afim da variável $B_t \sim N(0, t)$ então Y_t possui uma distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(\mu t + \sigma B_t) = \mu t + \sigma E(B_t) = \mu t \\ Var(Y_t) &= E[(Y_t - E(Y_t))^2] = E(\sigma B_t)^2 = \sigma^2 E[(B_t)^2] = \sigma^2 t \end{aligned}$$

ii) Genericamente, prova-se que

$$Y_t | Y_{t_0} = 0 \sim N(\mu(t - t_0), \sigma^2(t - t_0)) , \quad \forall t > t_0$$

iii) Prova-se que o processo $\{Y_t, t \geq 0\}$ é um processo gaussiano tendo incrementos independentes e estacionários. Segue-se que

$$\begin{aligned} E(Y_{t+s}Y_t) &= E[(Y_{t+s} - Y_t + Y_t)Y_t] \stackrel{\text{inc.ind.}}{=} E(Y_{t+s} - Y_t)E(Y_t) + E[(Y_t)^2] \\ &\stackrel{\text{inc.est.}}{=} E(Y_s)E(Y_t) + E[(Y_t)^2] = \mu s \mu t + \sigma^2 t + \mu^2 t^2 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} Cov(Y_{t+s}, Y_t) &= E(Y_{t+s}Y_t) - E(Y_{t+s})E(Y_t) = \mu^2 st + \sigma^2 t + \mu^2 t^2 - \mu(t+s)\mu t \\ &= \sigma^2 t \quad \forall s, t \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, o movimento browniano com *drift* tem a mesma função de autocovariância que o processo de Wiener.

2.6.4 Movimento Browniano Geométrico

O movimento browniano geométrico é um processo de difusão muito importante para a Matemática Financeira. É utilizado para modelar variáveis económicas como preço de acções, taxas de juros e preço de produtos. O processo é obtido através da exponencial de um movimento browniano com *drift*.

Seja $\{X_t, t \geq 0\}$ um processo de Wiener com coeficiente *drift* μ e coeficiente de difusão σ^2 . Tomando

$$Y_t = e^{X_t}, \text{ para } t \geq 0$$

obtem-se, de (2.9) e (2.10) com $g(x) = e^x$ (função não dependente de t), em que os parâmetros infinitesimais do processo $\{Y_t, t \geq 0\}$ são

$$m_Y(y) = m_X(x)e^x + \frac{1}{2}v_X(x)e^x = \mu e^x + \frac{1}{2}\sigma^2 e^x = \mu y + \frac{1}{2}\sigma^2 y.$$

e

$$v_Y(y) = v_X(x)(e^x)^2 = \sigma^2(e^x)^2 = \sigma^2 y^2$$

Definição 2.16 (Movimento Browniano Geométrico) *Um processo estocástico $\{Y_t, t \geq 0\}$ cujos parâmetros infinitesimais são dados por $m_Y(y) = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)y$ e $v_Y(y) = \sigma^2 y^2$ é chamado movimento browniano geométrico.*

OBSERVAÇÕES:

- i) O espaço de estados de um movimento browniano geométrico é o intervalo $(0, \infty)$ pois $Y_t = e^{X_t} > 0$. Tal implica que o movimento browniano geométrico não é um processo gaussiano.
- ii) Prova-se que, para qualquer t fixo, a variável Y_t tem distribuição log-normal com parâmetros μt e $\sigma^2 t$; ou seja, a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_{Y_t}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t y}} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \quad \text{para } y > 0$$

- iii) O movimento browniano geométrico $\{Y_t, t \geq 0\}$ pode ser generalizado introduzindo um valor inicial Y_0 do seguinte modo:

$$Y_t = Y_0 e^{X_t}$$

Este valor inicial Y_0 pode ser uma constante (positiva) ou, como no caso do processo de Wiener, pode ser uma variável aleatória.

Capítulo 3

Construção de Trajectórias

3.1 Introdução

O Microsoft Excel, a seguir ao Microsoft Word, é um dos *softwares* mais usados na comunidade académica. É simples de usar e encontra-se disponível na maioria dos computadores de hoje em dia. Além disso, tem a grande vantagem de não requerer qualquer ligação à internet. Trata-se de uma ferramenta tecnológica possível de ser usada por estudantes e docentes, em casa, escolas e universidades que possuam computadores.

O Excel constitui, segundo vários autores, uma boa opção para o ensino da estatística e das probabilidades, quer ao nível do ensino secundário quer ao nível do ensino superior (veja-se, por exemplo, [5]).

A nível gráfico, o Excel 2003 (versão usada) possui ferramentas que permitem a construção de uma grande variedade de gráficos. A nível analítico, as funções estatísticas existentes no Excel revelam-se suficientes para simular realizações de vários tipos de processos estocásticos.

Partindo de exemplificações de alguns processos, nos anteriores capítulos foram ilustradas possíveis trajectórias de diversos tipos clássicos de processos estocásticos (Figuras 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.8, 2.9 e 2.12). Todos os gráficos apresentados foram construídos em folhas de cálculo do Excel recorrendo a funções e comandos incorporados nesse software.

FIGURAS	PROPRIEDADES
1.1	Classificação dos processos estocásticos
2.1	Tipos de incrementos
2.2 e 2.3	Estacionaridade
2.5	Propriedade markoviana
2.7, 2.8 e 2.9	Tipo de processos de Poisson
2.12	Movimento browniano

Tabela 3.1: Correspondência entre as trajectórias apresentadas nos Capítulos 1 e 2 e os tipos de processos considerados na construção das mesmas.

Com esses gráficos destacaram-se propriedades específicas conforme se resume na Tabela 3.1.

Neste capítulo identificam-se os processos estocásticos considerados e descrevem-se as instruções usadas em folhas de cálculo do Excel 2003 na construção das trajectórias apresentadas. Essas instruções podem ser adaptadas a outros processos concretos.

Saliente-se que cada vez que se abre um documento Excel com o gráfico correspondente a uma trajectória ou quando se produz uma alteração nesse documento, nova trajectória é gerada pelo programa proporcionando um carácter dinâmico à folha de cálculo que contém a figura. O objectivo é fornecer uma ferramenta de trabalho dinâmica de apoio ao ensino-aprendizagem dos processos estocásticos. Pretende-se contribuir para o melhor entendimento das propriedades específicas de alguns tipos clássicos de processos estocásticos através da visualização gráfica de possíveis realizações dos mesmos.

3.2 Classificação dos Processos Estocásticos

No Capítulo 1 na Figura 1.1 destacaram-se as diferentes combinações da natureza (discreta ou contínua) dos espaços de estados e dos parâmetros de um processo estocástico. Os processos $\{X_t, t \in T\}$ considerados são dados por:

Caso (a) X_t é igual ao número de caras obtidas no t -ésimo lançamento de uma moeda, sendo a probabilidade de sair cara p definida pelo utilizador; $T = \mathbb{N}$.

Caso (b) X_t é igual ao tempo de duração do t -ésimo apagão ocorrido na Cidade da Praia, sendo assumido que as variáveis aleatórias X_t são independentes e com a mesma distribuição $N(\mu = 40, \sigma = 10)$; $T = \mathbb{N}$.

Caso (c) X_t é igual ao número de ocorrências num intervalo de amplitude t , em que os intervalos de tempo entre duas ocorrências consecutivas são independentes com distribuição uniforme em $(0, 100)$. Concretamente, o instante aleatório, T_i , em que ocorre a i -ésima ocorrência satisfaz a propriedade $T_i = T_{i-1} + 100 \times Y_i$, onde os Y_i , $i = 1, 2, \dots$, são variáveis aleatórias com distribuição uniforme em $(0, 1)$ e independentes, e T_0 segue uma distribuição uniforme em $(0, 1)$; $T = \mathbb{R}^+$.

Caso (d) X_t segue uma distribuição $N(\mu = 2, \sigma = 0.5)$ com instantes de ocorrências T_i gerados como na alínea (c); $T = \mathbb{R}^+$.

COMANDOS USADOS

Caso (a) : Para construir trajectórias com base em 20 passos do processo indicado acima em (a) colocou-se na coluna A , a partir da célula $A5$, os números sequenciais de 1 a 20, os quais definem os passos ou instantes de ocorrências do processo. Na coluna B , para gerar os números pseudo-aleatórios (entre 0 e 1), colocou-se, a partir da célula $B5$, a fórmula $= RAND()$. Na célula $D1$ colocou-se o valor da probabilidade de sair cara a ser introduzida pelo utilizador. Na coluna C , que se refere ao valor observado para o processo em cada passo, colocou-se a fórmula $= IF(Bi <= \$D\$1; 0; 1)$ na célula Ci , $i = 5, \dots, 24$ ¹. Para obter o gráfico foi escolhido o tipo de gráfico "Line", inserindo uma série com os valores da célula $C5$ até $C24$ e seleccionando a coluna $A5$ a $A24$ como a categoria de valores de X .

Na Figura 3.1 ilustram-se os comandos na folha de cálculo.

¹Basta colocar a fórmula correspondente ao primeiro elemento da coluna e arrastar esta, com o botão direito do rato, até à última célula pretendida.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Fig 1.1 (a)		prob. de cair cara = 0,5	(se igual a 0,5 , a moeda é honesta)				
2				Xn=numero de caras ocorridas no n-esimo lançamento				
3	lançamento	gerador						
4	n		Xn					
5	1	=RAND()	=IF(B5<=\$D\$1;0;1)					
6	2	=RAND()	=IF(B6<=\$D\$1;0;1)					
7	3	=RAND()	=IF(B7<=\$D\$1;0;1)					
8	:	:	:					

Figura 3.1: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(a).

Caso (b) : Para construir trajectórias do processo indicado acima em (b) com 20 passos procedeu-se similarmente ao Caso (a) nas colunas *A* e *B*. A coluna *B* irá auxiliar na obtenção de valores aleatórios resultantes de uma distribuição F , na coluna *C*. Este procedimento tem como base o facto de que se X é uma variável aleatória com função de distribuição F , então a variável aleatória $Y = F(X)$ segue uma distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Sendo assim, na célula Ci , $i = 5, \dots, 24$, colocou-se a fórmula $=NORMINV(Bi; 40; 10)$ para gerar aleatoriamente valores de uma distribuição normal de média 40 e desvio padrão 10. Estes valores gerados na coluna *C* definem os estados do processo em cada passo. Na Figura 3.2 ilustram-se os comandos na folha de cálculo. Para obter o gráfico foi efectuado procedimento similar ao indicado para o Caso (a).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Fig 1.1 (b)						
2		X_n segue uma distribuição Normal de média 40 e desvio padrão 10					
3							
4	n	Prob	X_n				
5	1	=RAND()	=NORMINV(B5;40;10)				
6	2	=RAND()	=NORMINV(B6;40;10)				
7	3	=RAND()	=NORMINV(B7;40;10)				
8	:	:	:				

Figura 3.2: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(b).

Caso (c) : Para construir trajectórias do processo indicado acima em (c) com 20 passos,

na coluna *A* procedeu-se à geração aleatória dos instantes de transição do processo e na coluna *B* colocaram-se os números sequenciais de 1 a 20 relativos aos estados do processo para os instantes gerados. Assim, na coluna *A* definiu-se o instante inicial do processo na célula *A5* usando a fórmula $= RAND()$ e definiram-se os restantes instantes nas células *A6* até *A24* colocando a fórmula $= RAND() * 100 + A_i$ na célula A_{i+1} . Nas colunas *C* e *D* repetiram os valores obtidos nas colunas *A* e *B* de modo a permitir a construção de um gráfico, em forma de escada, usando o tipo de gráfico *XY* (*Scatter*) incorporado no Excel. A Figura 3.3 ilustra a sequência de comandos usados na folha de cálculo.

	A	B	C	D	E
1	Fig 1.1 (c)		Valores a introduzir para		
2			construir a trajectoria		
3			num gráfico XY		
4	instante t	Xt	x	y	
5	=RAND()	1	=A5	0	
6	=RAND()*100+A5	2	=A5	=B5	
7	=RAND()*100+A6	3	=A6	=B5	
8	:	:	=A6	=B6	
9			=A7	=B6	
10			=A7	=B8	
11			:	:	

Figura 3.3: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(c).

Caso (d) : Para construir trajectórias do processo indicado em (d) com 20 passos, na coluna *A* foram gerados aleatoriamente os instantes de transição do processo procedendo como se fez no Caso (c). Na coluna *C* definiram-se os estados do processo procedendo de modo similar ao Caso (b) colocando a fórmula $= NORMINV(B_i; 2; 0.5)$ na célula C_i de modo a gerar valores de uma distribuição normal de média 2 e desvio padrão 0.5. A Figura 3.4 ilustra a sequência de comandos usados na folha de cálculo. Para obter o gráfico foi escolhido o tipo de gráfico "*Line*", inserindo uma série com os valores da célula *C5* até *C24* e seleccionando a coluna *A5* a *A24* como a categoria de valores de *X*, à semelhança dos casos reportados em (a) e (b).

	A	B	C	D	E
1	Fig 1.1 (d)				
2		Xt com dist Normal de média=2 e desvio padrão =0,5			
3					
4	instante t	Prob	Xt		
5	=RAND()	=RAND()	=NORMINV(B5;2;0,5)		
6	=RAND()*100+A5	=RAND()	=NORMINV(B6;2;0,5)		
7	=RAND()*100+A6	=RAND()	=NORMINV(B7;2;0,5)		
8	:	:	:		

Figura 3.4: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 1.1(d).

3.3 Incrementos e Estacionariedade

Para visualizar as propriedades de independência e estacionariedade dos incrementos de um processo estocástico, é aqui proposta a construção de trajectórias dos seguintes processos:

Caso (A) Processo de incrementos independentes e estacionários: Processo de Poisson de intensidade $\lambda = 2$. Este processo pode ser gerado usando o algoritmo descrito na página 24. Para gerar os valores e_i referidos no Passo 2a do algoritmo, considera-se o facto da variável aleatória $U = 1 - F(T)$ seguir uma distribuição Uniforme em $[0, 1]$ quando T tem função de distribuição F . Assim, se F é a função de distribuição da exponencial de média $1/\lambda$ então $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Consequentemente, $U = 1 - F(T)$ implica que os valores a gerar resultam da variável $T = -\frac{\ln U}{\lambda}$. Logo, no caso de $\lambda = 2$, os instantes do processo serão gerados somando ao instante anterior o valor $-\frac{\ln u}{2}$ onde u é um número pseudo-aleatório.

Caso (B) Processo de incrementos independentes e não estacionários: $\{X_t, t \in N\}$, onde $X_t = X_{t-1} + N_t$, onde X_1 segue uma distribuição uniforme em $[0, 1]$, $N_t, t = 1, 2, \dots$, são independentes e N_t segue uma distribuição uniforme em $[2t * (-1)^t, 1 + 2t * (-1)^t]$. Neste processo os incrementos $N_t = X_t - X_{t-1}$ são gerados ao acaso para garantir a independência. A distribuição de probabilidade dos incrementos N_t é definida em termos de t de modo a garantir a não estacionariedade dos incrementos do processo.

Caso (C) Processo de incrementos não independentes e estacionários: $\{X_t, t \in N\}$, onde $X_t = X_{t-1} + k$, onde k é uma constante. Neste processo os incrementos $N_t = X_t - X_{t-1} = k$ são constantes. Desse modo, o valor do incremento no passo n condiciona o valor do incremento no passo $n + 1$ (pois serão iguais), pelo que os incrementos são dependentes. Por outro lado, qualquer vector $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n})$, para qualquer n natural, será sempre um vector de constantes (k, k, \dots, k) , com probabilidade 1, independentemente dos instantes t_1, \dots, t_n que se considere.

Caso (D) Processo de incrementos não independentes e não estacionários: $\{X_t, t \in N\}$, onde $X_t = X_{t-1} + (-1)^t * k$, onde $X_1 = 0$. Neste processo o valor de cada incremento depende do instante de tempo sendo k ou $-k$ consoante o passo do processo seja par ou ímpar.

Estes foram os processos considerados na Figura 2.1 do capítulo anterior. Nas Figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 encontram-se sumariados os comandos usados numa folha de cálculo Excel para definir os pontos por onde passam possíveis trajectórias daqueles quatro processos. Para desenhar as trajectórias no Excel foram escolhidos os tipos de gráficos *Line* -Figuras 3.5, 3.7 e 3.8- e *XY (Scatter)* -Figura 3.6-

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Fig 2.1.(a)	Incrementos independentes e estacionários				Valores a introduzir para		
2		Xt - Poisson(lambda * t)				construir a trajectoria		
3		Instantes de tempo - Exp (lambda)				num gráfico XY		
4	lambda =	2				y	x	
5		instante t	Xt	Prob		=B6-LN(\$D7)/B\$4	0	
6		0				=B6-LN(\$D7)/B\$4	1	
7		=B6-LN(\$D7)/B\$4	1	=RAND()		=B7-LN(\$D8)/B\$4	1	
8		=B7-LN(\$D8)/B\$4	2	=RAND()		=B7-LN(\$D8)/B\$4	2	
9		=B8-LN(\$D9)/B\$4	3	=RAND()		=B8-LN(\$D9)/B\$4	2	
10		:	:	:		=B8-LN(\$D9)/B\$4	3	
11		:	:	:		:	:	

Figura 3.5: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(a).

	A	B	C	D	E
1	Fig 2.1.(b)	Incrementos independentes (e não estacionários)			
2		$X_t = X_{(t-1)} + N_t$			
3		$X_1 \sim \text{Unif}(0,1) ; \quad N_t \sim \text{Unif}(0+2t*(-1)^t, 1+2t*(-1)^t);$			
4		N_t 's independentes e independentes de X_1			
5					
6	n	N_t	X_n		
7	1	$=\text{RAND}() + 2*A7*(-1)^{A7}$	$=B7+C6$		
8	2	$=\text{RAND}() + 2*A8*(-1)^{A8}$	$=B8+C7$		
9	3	$=\text{RAND}() + 2*A9*(-1)^{A9}$	$=B9+C8$		
10	:	:	:		
11	:	:	:		

Figura 3.6: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(b).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Fig 2.1.(c)	Incrementos não independentes e estacionários						Valores a introduzir para	
2		$X_t = X_{(t-1)} + k$						construir a trajectoria	
3	k=constante	aleatória = 0,680405						num gráfico XY	
4								y	x
5	t	X_t						$=A7$	0
6	0							$=H5$	1
7	$=A6+\$C\3	1						$=A8$	1
8	$=A7+\$C\3	2						$=H7$	2
9	$=A8+\$C\3	3						$=A9$	2
10	:	:						$=A9$	3
11	:	:						:	:

Figura 3.7: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.1(c).

Relativamente a processos com a propriedade de serem estacionários, fracamente ou fortemente, dois exemplos concretos foram considerados no capítulo anterior:

Caso (i) Processo fortemente e fracamente estacionário : Processo gaussiano de média μ e desvio padrão σ e com componentes independentes. A Figura 3.1 diz respeito aos comandos propostos para construir trajectórias daquele processo com $\mu = 40$ e $\sigma = 10$. Para a construção da Figura 2.2, apresentada no Capítulo 2, tomou-se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Caso (ii) Processo não fortemente e sim fracamente estacionário: Processo $\{X_t, t \in N\}$ onde $X_t, t = 1, 2, \dots$, são independentes com distribuição de probabilidade dada por

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Fig 2.1.(d)	Incrementos não independentes e não estacionários				Valores a introduzir para		
2				$X_t = X_{t-1} + (-1)^t E$	construir a trajetoria			
3	Instantes de tempo			E - Uniforme (0,1)	num gráfico XY			
4	Exp (lambda)	lambda=	2	E=	0,427266		y	x
5							=B7+(-1)^A8*\$E\$4	0
6	n	Xn					=B7+(-1)^A8*\$E\$4	=A8
7		0					=B8+(-1)^A9*\$E\$4	=H6
8	1	=B7+(-1)^A8*\$E\$4					=B8+(-1)^A9*\$E\$4	=A9
9	2	=B8+(-1)^A9*\$E\$4					=B9+(-1)^A10*\$E\$4	=H8
10	3	=B9+(-1)^A10*\$E\$4					=B9+(-1)^A10*\$E\$4	=A10
11	4	=B10+(-1)^A11*\$E\$4					=B10+(-1)^A11*\$E\$4	=H10
12	5	=B11+(-1)^A12*\$E\$4					=B10+(-1)^A11*\$E\$4	=A11
13	6	=B12+(-1)^A13*\$E\$4					=B11+(-1)^A12*\$E\$4	=H12
14	:	:					=B11+(-1)^A12*\$E\$4	=A12
15	:	:					:	:

Figura 3.8: Instruções usadas para obter a trajetória da Figura 2.1(d).

$P(X_t = -\sqrt{t}) = P(X_t = \sqrt{t}) = \frac{1}{2t}$ e $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{t}$. Este processo foi considerado no Exemplo da página 13. Para a construção de trajetórias deste processo sugere-se definir os pontos da trajetória como é indicado na Figura 3.9.

	A	B	C	D	E	F
2	Fig 2.3	processo não fortemente e sim fracamente estacionário				
3			x	-Raiz quadrada de t	0	-Raiz quadrada de t
4			P(Xt=x)	1/(2t)	1-1/t	1/(2t)
5						
6	t	Xt				
7	1	=IF(C7<1/(2*A7);-SQRT(A7);IF(C7>1/(2*A7)+1-1/A7;SQRT(A7);0))	=RAND()			
8	2	=IF(C8<1/(2*A8);-SQRT(A8);IF(C8>1/(2*A8)+1-1/A8;SQRT(A8);0))	=RAND()			
9	3	=IF(C9<1/(2*A9);-SQRT(A9);IF(C9>1/(2*A9)+1-1/A9;SQRT(A9);0))	=RAND()			
10	:	:	:			

Figura 3.9: Instruções usadas para obter a trajetória da Figura 2.3.

3.4 Passeio Aleatório e Processos de Poisson

Na Figura 2.5 procurou-se ilustrar uma possível realização de um processo simples com as propriedades markovianas. Trata-se do passeio aleatório simétrico, o qual pode ser obtido seguindo a sequência de instruções indicadas na Figura 3.10 .

	A	B	C
2	Fig 2.5		
3		Passeio aleatorio simétrico	
4			
5	t	Xt	
6	1	0	=RAND()
7	2	=IF(C7<1/2;B6-1;B6+1))	=RAND()
8	3	=IF(C8<1/2;B7-1;B7+1))	=RAND()
9	:	:	:

Figura 3.10: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.5.

Para gerar processos de Poisson homogêneos, seguiu-se o algoritmo descrito na página 24 como foi mencionado acima no Caso (A). Destaca-se que a Figura 2.7 foi obtida seguindo as instruções indicadas na Figura 3.5 para diferentes valores de λ (célula B4). Cada valor de λ corresponde a uma série de valores amostrais do processo a serem introduzidos no comando gráfico "Line" com vista a obter a correspondente trajectória.

Na Figura 2.8 procurou-se ilustrar realizações de processos de Poisson não homogêneos. Naquela figura duas classes de funções para a função de parâmetro foram consideradas: (a) $\lambda_t = a + bt$ e (b) $\lambda_t = a + b \cos(2\pi t)/10$, com a e b constantes reais. Para gerar processos de Poisson não homogêneos com aquelas funções de parâmetro seguiu-se o algoritmo descrito na página 28. Para tal foi primeiro necessário determinar um majorante $\bar{\lambda}$ de cada função λ_t . No caso da função $\lambda_t = a + b \cos(2\pi t)/10$ é evidente que $\lambda_t \leq a + b/10$, pelas propriedades da função trigonométrica, e portanto $\bar{\lambda} = a + b/10$. No caso da função $\lambda_t = a + bt$ o valor $\bar{\lambda}$ foi determinado em termos de um instante de tempo máximo InstMax que se desejava que a trajectória a desenhar não ultrapassasse. Assim, no caso da função linear tomou-se $\bar{\lambda} = a + b * \text{InstMax}$. Note-se que quando $b = 0$ ambas as funções coincidem com a constante a e, consequentemente, o processo de Poisson correspondente será homogêneo. Uma vez identificado o valor de $\bar{\lambda}$, geraram-se os valores e_i do Passo 2a do algoritmo de modo análogo ao referido acima para o Caso (A) tomando $\lambda = \bar{\lambda}$. A seguir, geraram-se os valores u_i do Passo 2c do algoritmo gerando números pseudo-aleatórios (instrução =RAND() no Excel). Por fim, para realizar o Passo 2d daquele algoritmo utilizou-se o comando IF do Excel. Na Figura 3.11 podem ser encontradas as primeiras sequências

de comandos usadas numa folha de cálculo para gerar os primeiros instantes de tempo de ocorrência de transição de estados de um processo de Poisson não homogêneo com função de parâmetro $\lambda_t = 1 + t$. As trajectórias foram obtidas recorrendo ao tipo de gráfico XY (*Scatter*). Para construir trajectórias com função de parâmetro dada pela função trigonométrica $\lambda_t = a + b \cos(2\pi t)/10$ ou outra, o procedimento é similar.

	A	B	C
1	Processos de Poisson não Homogêneos		
2	Lambda(t)=a + b*t		
3	InstMax=	20	
4		a=	
5		1	
6		lambdaMax=	
7		=B\$5+B\$9*B\$3	
8	Instantes de tempo	b=	
9	Exp (lambdaMax)	1	
10	t	Xt	
11	0		u
12	=LN(I12)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A12)>B\$7;-1;IF(\$I12>(\$B\$5+B\$9*\$A12)/B\$7;B11;B11+1))	=RAND()
13	=A12-LN(I13)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A13)>B\$7;-1;IF(\$I13>(\$B\$5+B\$9*\$A13)/B\$7;B12;B12+1))	=RAND()
14	=A13-LN(I14)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A14)>B\$7;-1;IF(\$I14>(\$B\$5+B\$9*\$A14)/B\$7;B13;B13+1))	=RAND()
15	=A14-LN(I15)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A15)>B\$7;-1;IF(\$I15>(\$B\$5+B\$9*\$A15)/B\$7;B14;B14+1))	=RAND()
16	=A15-LN(I16)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A16)>B\$7;-1;IF(\$I16>(\$B\$5+B\$9*\$A16)/B\$7;B15;B15+1))	=RAND()
17	=A16-LN(I17)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A17)>B\$7;-1;IF(\$I17>(\$B\$5+B\$9*\$A17)/B\$7;B16;B16+1))	=RAND()
18	=A17-LN(I18)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A18)>B\$7;-1;IF(\$I18>(\$B\$5+B\$9*\$A18)/B\$7;B17;B17+1))	=RAND()
19	=A18-LN(I19)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A19)>B\$7;-1;IF(\$I19>(\$B\$5+B\$9*\$A19)/B\$7;B18;B18+1))	=RAND()
20	=A19-LN(I20)/B\$7	=IF((\$B\$5+B\$9*\$A20)>B\$7;-1;IF(\$I20>(\$B\$5+B\$9*\$A20)/B\$7;B19;B19+1))	=RAND()
21	:	:	:

Figura 3.11: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.8(a) quando $a = b = 1$. Alterando as células $B5$ e $B9$ outros valores de a e b podem ser concretizados. Se o valor obtido para λ_t no tempo $t = A_i$ (descrito na coluna B por $B5 + B9 * A_i$) é superior ao valor de $\bar{\lambda}$ pré-definido (colocado na célula $B7$), na coluna B onde são gerados os estados do processo obter-se-á o valor -1 indicando ao utilizador que foi atingido o limite máximo assumido para a função λ_t .

Na Figura 2.9 procurou-se ilustrar possíveis realizações de processos de Poisson composto tomando diferentes distribuições de X_t . Na Figura 3.12 encontra-se sumariado o conjunto de comandos usados para gerar os pontos por onde passa uma possível trajectória de um processo de Poisson composto para uma distribuição concreta de X_t , o qual pode ser adaptado para qualquer outra distribuição de X_t que se considere. Em primeiro lugar, foram gerados os tempos de transição de estados do processo de Poisson composto

gerando um processo de Poisson homogéneo usando o algoritmo descrito na página 24 (coluna *A*). A seguir, foram gerados as quantidades que são acrescentadas ao processo em cada instante de transição (coluna *E*; esta coluna *E* foi construída recorrendo à ferramenta do *Data Analysis* – *random number generation* incorporadas no menu *Tools*. Trata-se de uma ferramenta estática no sentido que não muda se se alterar as tabelas das distribuições, sendo necessário voltar a gerar novos valores, ou seja, a aplicar o comando no *Data Analysis*).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Poisson Composto	Lambda=	2						Valores a introduzir para	
2					Nt - Poisson(lambda * t)				construir a trajetoria	
3	Instantes de tempo				X _i gerados de acordo				Dist. 1	
4	Exp (lambda)	Yt=SUM _{i=1} ^{Nt} X _i			com a tabela de distribuições					
5					a vermelho				=LN(C7)/\$C\$1	0
6	0								=LN(C7)/\$C\$1	=B6+E7
7	=LN(C7)/\$C\$1	=B6+E7	=RAND()	0	0	0,5			=A7-LN(C8)/\$C\$1	=B6+E7
8	=A7-LN(C8)/\$C\$1	=B7+E8	=RAND()	0	1	0,25			=A7-LN(C8)/\$C\$1	=B7+E8
9	=A8-LN(C9)/\$C\$1	=B8+E9	=RAND()	3	2	0,2			=A8-LN(C9)/\$C\$1	=B7+E8
10	=A9-LN(C10)/\$C\$1	=B9+E10	=RAND()	1	3	0,05			=A8-LN(C9)/\$C\$1	=B8+E9
11	=A10-LN(C11)/\$C\$1	=B10+E11	=RAND()	2	b	P(B=b)			=A9-LN(C10)/\$C\$1	=B8+E9
12	=A11-LN(C12)/\$C\$1	=B11+E12	=RAND()	0					=A9-LN(C10)/\$C\$1	=B9+E10
13				1					=A10-LN(C11)/\$C\$1	=B9+E10
14				2					=A10-LN(C11)/\$C\$1	=B10+E11
15				0					=A11-LN(C12)/\$C\$1	=B10+E11
16				2					=A11-LN(C12)/\$C\$1	=B11+E12
17				1						

Figura 3.12: Instruções usadas para obter a trajetória da Figura 2.9 com distribuição de probabilidade de X_t dada por (Dist 1): $P(X_t = 0) = 0.5$, $P(X_t = 1) = 0.25$, $P(X_t = 2) = 0.2$, $P(X_t = 3) = 0.05$;

3.5 Movimento Browniano

Finalmente, no capítulo anterior, foi abordado o movimento browniano. Para gerar trajetórias deste processo (Figura 2.12) sugere-se seguir a sequência de instruções descritas na Figura 3.13. Para cada instante espaçado de 0.01 unidades de tempo gerou-se o valor do incremento do processo tendo por base a propriedade da equação (2.6). Para determinar o valor do processo em cada instante (coluna *B*), cada incremento (coluna *C*) foi adicionado ao valor estado do processo no instante anterior.

	A	B	C	D	
1	Movimento browniano				
2					
3		Variancia=	2		
4					
5	instante t	Wt	Incrementos W_001	gerador	
6					
7	0	0		=RAND()	
8	0,01	=C8	=NORMINV(D8;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
9	=A8+0,01	=B8+C9	=NORMINV(D9;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
10	=A9+0,01	=B9+C10	=NORMINV(D10;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
11	=A10+0,01	=B10+C11	=NORMINV(D11;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
12	=A11+0,01	=B11+C12	=NORMINV(D12;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
13	=A12+0,01	=B12+C13	=NORMINV(D13;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
14	=A13+0,01	=B13+C14	=NORMINV(D14;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	
15	=A14+0,01	=B14+C15	=NORMINV(D15;0;\$C\$3*0,01)	=RAND()	

Figura 3.13: Instruções usadas para obter a trajectória da Figura 2.12.

Capítulo 4

Conclusões

Os Processos Estocásticos são um ramo particular da Teoria da Probabilidade que procura estudar fenómenos aleatórios que dependem de um parâmetro, habitualmente traduzido pelos instantes de tempo em que os fenómenos são observados.

Neste trabalho foram abordados dois aspectos fundamentais dos processos estocásticos clássicos: as propriedades que caracterizam cada um e formas simples de construir trajectórias de alguns processos com essas propriedades.

Alguns tipos clássicos de processos estocásticos foram realçados no Capítulo 2 na sua componente teórica. Foram abordados processos estacionários, gaussianos e markovianos. Destacaram-se o passeio aleatório, os processos de Poisson e os processos de Wiener.

O processo de Markov, devido ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov, estuda acontecimentos cujo conhecimento do futuro é independente do passado, dado o presente. Os processos de Poisson, devido ao matemático francês Siméon Denis Poisson, são processos estocásticos associados a contagens de eventos que ocorrem independentes uns dos outros, são de fundamental importância e têm muita aplicação. O processo de Wiener, devido ao matemático Norbert Wiener e aos primeiros estudos realizados por Robert Brown, é muito utilizado como elemento de construção de processos estocásticos mais complexos.

O Capítulo 3 foi dedicado à descrição de comandos do Excel 2003 que possibilitem a construção de trajectórias de algumas classes de processos estocásticos clássicos estudados

no capítulo anterior.

O principal contributo desta dissertação foi mostrar ferramentas de simulação gráficas do Microsoft Excel 2003, as quais possam ser úteis na construção de trajectórias de diferentes tipos clássicos de processos estocásticos, com vista a providenciar uma dimensão visual das propriedades a eles associados. Verificou-se, como seria esperado, que a visualização de apenas uma trajectória de um processo, nem sempre permite captar alguma propriedade ou característica dos processos considerados. Os instrumentos de trabalho desenvolvidos na presente dissertação têm carácter dinâmico na medida que novas trajectórias podem ser imediatamente geradas, possibilitando a observação de várias realizações de um mesmo processo. Espera-se que a visualização gráfica de possíveis realizações de um mesmo processo represente um potencial à compreensão visual das propriedades intrínsecas associadas ao processo em causa. Pretende-se que o utilizador adquira uma certa sensibilidade ao aspecto gráfico de realizações de processos com essas propriedades.

Como trabalho futuro sugere-se ampliar o conjunto de processos e explorar outros softwares, como por exemplo o Matlab e Maple, na construção de possíveis trajectórias de processos estocásticos de interesse.

Bibliografia

- [1] Alves, Rui e Catarina Delgado (1997), *Processos Estocásticos*, Notas de aula, Faculdade de Economia, Universidade do Porto.
- [2] Anteneodo, Celia (2004), *Processos estocásticos*, Notas de aula. Rio de Janeiro.
- [3] Bharucha-Reid, Albert (1997) *Elements of the theory of Markov Processes and their applications*, Mc Graw Hill.
- [4] Bressan, Graça (2002), *Noções de Processos Estocásticos e Cadeia de Markov*, Notas de aula. EPUSP.
- [5] Christensen, Aaron R. e Larry J. Stephens (2003) Microsoft Excel as a supplement in a high school statistics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34: 6, 881-885.
- [6] Freitas, Adelaide (2008), *Apontamentos de Processos Estocásticos*. Notas de aulas.
- [7] Hoto, Robinson (2005), *Processos estocásticos*, Notas de aula.
- [8] Howard, M. Taylor e Samuel Karlin (1998) *An Introduction to stochastic modeling*, 3rd Edition. Academic Press.
- [9] I., N. Kovalenko, N. Yu. Kuznetsov, V. M. Shurenkov e A.V. Shorokhod (1996) *Models of random processes - A Handbook for Mathematicians and Engineers*. CRC Press.
- [10] Karlin, Samuel e Howard M. Taylor (1975) *A first course in stochastic processes*, Second Edition. Academic Press.

- [11] Lages, Walter (2005), *Filtragem Estocástica*, Notas de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [12] Lefebvre, Montréal (2005), *Applied Stochastic Processes*. Springer.
- [13] Milho, Isabel, (2003), *Teoria de Probabilidade*, Folhas de apoio da disciplina de Detecção e Estimação.
- [14] Norman, Bailey, (1964) *The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences*. Wiley.
- [15] Sousa, Ricardo, Ana Sousa, Gildo Cunha e Rosário Martins (2007), *Probabilidade e Inferência estatística - Exercícios Resolvidos*, 1ª Edição. Lisboa.
- [16] Steele, J. Michael (2001) *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer.
- [17] Vaz, Francisco, (2002), *Probabilidade e Processos Estocásticos para Engenharia Eletrotécnica*. Universidade de Aveiro.
- [18] Wilbur, B. D. Jr. (1970) *Probability and random processes*. International Student edition. McGraw-Hill.
- [19] <http://label2.ist.utl.pt> (acedida em Setembro de 2008).
- [20] <http://www.dt.fee.unicamp.br> (acedida em Maio de 2009).
- [21] <http://www.iag.puc-rio.br/brandao/ADM2343> (acedida em Julho de 2009).
- [22] <http://www.columbia.edu/ks20/4703-Sigman/4703-07-Notes-PP-NSPP.pdf> (acedida em Julho de 2009)
- [23] <http://www.poliparatodos.usp.br> (acedida em Setembro de 2009).
- [24] <http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/xplore/tutorials/stfhtmlnode90.html> (acedida em Outubro de 2009).
- [25] <http://www.wikipedia.org/> (acedida em Dezembro de 2009)